ORSAY
n° d'ordre 2966

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR TROISIEME CYCLE

par

Cécile KOCH

Sujet : DIFFUSION D'UN PLASMA A TRAVERS UN CHAMP MAGNETIQUE
A DEUX DIMENSIONS.
APPLICATION A UNE DECHARGE MULTIPOLAIRE.

Soutenue le 12 MARS 1981 devant la Commission d'examen

MM. J.L. DELCROIX Président
C. BARDOS
H. DOUCET
G. MATTHIEUSSENT
J. SCHMITT

ORSAY
n° d'ordre 2966

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR TROISIEME CYCLE

par

Cécile KOCH

Sujet : DIFFUSION D'UN PLASMA A TRAVERS UN CHAMP MAGNETIQUE
A DEUX DIMENSIONS.
APPLICATION A UNE DECHARGE MULTIPOLAIRE.

Soutenue le 12 MARS 1981 devant la Commission d'examen

MM. J.L. DELCROIX Président
C. BARDOS
H. DOUCET
G. MATTHIEUSSENT
J. SCHMITT

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX qui m'a accueillie dans son laboratoire et a accepté de présider ma thèse.

Je remercie Messieurs C. BARDOS et H. DOUCET d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement G. MATTHIEUSSENT pour les discussions quotidiennes que nous avons eues, et qui ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Monsieur J. SCHMITT a formulé des remarques judicieuses qui m'ont aidée à mettre au point ce manuscrit. Je l'en remercie ici.

Mes remerciements vont également à Madame E. CLAUDON qui a dactylographié cette thèse avec le plus grand soin et beaucoup de gentillesse.

TABLE DES MATIERES

	Pages
- INTRODUCTION.	1
- CHAPITRE I - RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX SUR LE CONFINEMENT D'UN PLASMA PAR UN CHAMP MAGNETIQUE MULTICUSP.	3
1) Résultats théoriques.	3
2) Résultats expérimentaux.	4
- CHAPITRE II - DECHARGE MULTIPOLAIRE.	12
1) Modèle de décharge.	12
2) Géométrie des champs magnétiques multicusp.	14
2.1 - Rappels. Potentiel vecteur et potentiel scalaire.	14
2.2 - Champ magnétique multipolaire.	15
2.3 - Champ magnétique créé par une grille de fils de courants.	23
- CHAPITRE III - DESCRIPTION PHENOMENOLOGIQUE D'UNE DECHARGE MULTIPOLAIRE.	29
1) Rappels : décharge classique.	29
1.1 - Hypothèses de diffusion ambipolaire.	29
1.2 - Hypothèse de Tonks et Langmuir.	30
2) Influence du champ magnétique de surface.	34
- CHAPITRE IV - MOUVEMENT DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS UN CHAMP MAGNETIQUE.	39
1) Hypothèse sur la densité et la fonction de distribution des électrons primaires en champ nul.	39
2) Invariants du mouvement.	39
3) Domaine accessible aux électrons primaires.	41
4) Largeur des trous de fuite des électrons primaires.	43
4.1 - Géométrie multipolaire.	43
4.2 - Grille de courants.	44
- CHAPITRE V - DIFFUSION AMBIPOLAIRE EN CHAMP MAGNETIQUE.	45
1) Equations de diffusion en régime stationnaire.	45
1.1 - Equations macroscopiques.	45
1.2 - Validité des équations macroscopiques.	46

.../...

Pages

2) Mobilités et coefficients de diffusion en champ magnétique. 52
2.1 - Définitions ; géométrie du problème. 52
2.2 - Résolution en négligeant les collisions coulombiennes. 53
2.3 - Résolution en tenant compte des collisions coulombiennes. 56
3) Diffusion quasi-ambipolaire. 58
3.1 - Hypothèse. 58
3.2 - Détermination des profils de densité et de potentiel. 59
4) Résultats qualitatifs. 60
4.1 - Inversion du champ électrique. 60
4.2 - Domaines de diffusion. Epaisseur de gaine. 61
4.3 - Estimation de la largeur des trous de fuite. 65

- CHAPITRE VI - RESOLUTION DE L'EQUATION DE DIFFUSION. 68
1) Principe du calcul. 68
1.1 - Conditions aux limites. 68
1.2 - Raccordement des solutions dans les régions I et II. 70
1.3 - Domaine d'intégration. 73
2) Résolution numérique. 74
2.1 - Expression de l'équation de diffusion dans un système de coordonnées liées au champ. 74
2.2 - Domaine d'intégration dans le plan λ, μ. 76
2.3 - Méthode de résolution numérique. 76
2.4 - Traduction des conditions aux limites dans le plan λ,μ. 79
2.5 - Contrôle de la précision. 80
3) Résultats des calculs numériques. 80
3.1 - Modèle sans ionisation. 80
3.2 - Modèle avec ionisation. 90
3.3 - Retour aux coefficients de réflexion. 108
- CONCLUSION. 109
- APPENDICE 0 - Grandeurs intervenant dans le modèle de décharge multipolaire. 111
- APPENDICE 1 - Champ produit par des aimants cylindriques disposés parallèlement aux génératrices d'un cylindre. 114

.../...

Pages

- APPENDICE 2 - Champ produit par des fils disposés suivant les génératrices d'un cylindre et parcourus par des courants alternés. 122
- APPENDICE 3 - Calcul des mobilités et des coefficients de diffusion en champ magnétique. 128
- APPENDICE 4 - Influence du courant de conduction sur les profils de densité et de potentiel dans une décharge sans champ magnétique. 141
- APPENDICE 5 - Plan du programme de calcul de la densité et du potentiel. 143
- REFERENCES. 151

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547318_0039

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'étude des plasmas en laboratoire, l'utilisation de dispositifs à champ magnétique multipolaire s'est développée au cours des dix dernières années. Les caractères généraux de ces dispositifs peuvent être résumés ainsi : le plasma est créé par des électrons rapides (ou encore électrons "primaires") qui ionisent le gaz. Le plasma est contenu dans une enceinte tapissée d'aimants, qui créent un champ magnétique localisé à proximité de la paroi. L'effet de ce champ magnétique est de faire gagner plusieurs ordres de grandeur à la densité. On a renoncé à utiliser ces dispositifs dans le but d'atteindre les conditions de la fusion, mais le calme et l'uniformité des plasmas multipolaires permettent d'y réaliser des expériences fondamentales de physique des plasmas[30] à [40] aussi bien que de chimie des plasmas. D'autre part, le fait que la densité de ces plasmas soit beaucoup plus grande - pour un même courant de décharge - que dans des enceintes traditionnelles rend ce mode de fabrication de plasmas intéressant du point de vue économique.

Si le comportement de tels plasmas a été étudié expérimentalement[1] à [15], le rôle du champ magnétique multipolaire n'a pas été élucidé théoriquement.

Nous présentons dans ce travail une théorie de diffusion d'un plasma collisionnel à travers un champ magnétique à deux dimensions, dans des conditions de pression telles que les libres parcours moyens des ions et des électrons du plasma soient très petits devant les distances caractéristiques des variations du champ magnétique.

Cette étude de la diffusion en champ magnétique permet de faire un certain nombre de considérations qualitatives sur les coefficients de transport et la structure de l'équation de diffusion ; elle permet en particulier de définir deux types de domaine de diffusion : les domaines de champ faible, où la diffusion se fait de façon pratiquement isotrope, et les domaines de champ fort, où la diffusion se fait uniquement parallèlement aux lignes de champ. On comprend également comment le champ électrique ambipolaire perpendiculaire aux lignes de champ est amené à s'inverser et à confiner les ions.

Nous appliquons ensuite cette théorie à une décharge multipolaire. Pour fixer les idées, nous traitons le cas de la diffusion d'un plasma d'argon (sous une pression de 10^{-3} Torr), créé par des primaires de 50 eV, confiné par un champ magnétique de type "multicusp", créé soit par des fils de courants de sens alternés ("picket fence") soit par des aimants ("multipole"). Les notions qualitatives de domaines de diffusion permettent d'évaluer la dimension des trous de fuite des ions et des électrons du plasma à travers les cusps, que nous trouvons être proportionnelle au rayon de Larmor hybride. On peut de plus définir une épaisseur de gaine, qui est la largeur de la région dans laquelle la diffuson du plasma est limitée par le champ magnétique. On trouve qu'elle dépend peu de la valeur du champ magnétique. Tous ces résultats ont été observés expérimentalement[7][8], mais jusqu'ici aucune théorie n'en avait rendu compte de façon satisfaisante. La résolution numérique de l'équation de diffusion nous permet ensuite d'accéder aux profils de densité et de potentiel ; nous trouvons qu'entre les cusps la densité chute brutalement et le champ électrique change de sens, ce qui rejoint bien les conclusions de l'étude générale de la diffusion en champ magnétique. La comparaison de la densité au centre du plasma avec et sans champ multicusp (et en supposant que l'efficacité des primaires n'est pas changée) montre que ce champ magnétique confine assez mal le plasma ; ceci est bien compatible avec les observations expérimentales selon lesquelles l'augmentation de densité dans un multipole est due principalement au confinement des électrons primaires.

CHAPITRE I

RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX SUR LE CONFINEMENT D'UN PLASMA PAR UN CHAMP MAGNETIQUE MULTICUSP

1. RESULTATS THEORIQUES

Dans la recherche de plasmas stables, on a été amené à envisager des structures de champ magnétique dans lesquelles le champ magnétique croît dans toutes les directions. Il a été montré[16] qu'un plasma contenu dans des lignes de champ telles que leurs centres de courbure soient tous extérieurs au plasma est stable du point de vue magnétohydrodynamique, ceci quelle que soit la valeur du rapport β de la densité d'énergie cinétique du plasma à la densité d'énergie magnétique :

$$\beta = \frac{2\mu_o p}{B^2}$$

où p est la pression et B l'intensité du champ magnétique.

Le comportement du plasma dépend cependant de la valeur de β. Les plasmas denses, caractérisés par $\beta > 1$ repoussent les lignes de champ, et à l'équilibre le plasma, non magnétisé, est séparé du vide où règne le champ magnétique par une gaine dont Spalding[17] puis Haines[18] ont démontré que l'épaisseur est comprise entre les rayons gyromagnétiques électronique et hybride, suivant les fonctions de distribution des vitesses des particules du plasma.

Au contraire le comportement d'un plasma faiblement ionisé, caractérisé par $\beta < 1$, dans un champ magnétique rapidement décroissant, comme celui d'un multipole, n'a pas été étudié de façon satisfaisante. La difficulté provient de l'impossibilité d'utiliser la théorie adiabatique[19] pour étudier le mouvement des particules chargées. En effet, si l'on peut décrire ce mouvement par les invariants adiabatiques dans la région où le champ magnétique est le plus fort, il existe une région, comprise entre la région de champ nul et la région de champ fort, où le rayon de Larmor est de l'ordre de la distance sur laquelle le champ varie. Certains auteurs[20] ont tenté d'étudier les trajectoires des particules dans le champ magnétique, mais leurs résultats ne coïnci-

dent pas avec les résultats expérimentaux[5],[7] ; en effet ils ont limité leur étude à des plasmas dont les températures électronique et ionique sont égales.

Dans ce travail nous présenterons une théorie de diffusion ambipolaire d'un plasma à travers un champ magnétique de type "multicusp". Lehnert[21] a étudié la diffusion d'un plasma stationnaire perpendiculairement à un champ magnétique uniforme, quand on néglige les collisions coulombiennes ; de plus Lehnert se limite à des systèmes à symétrie axiale ou plane. Il arrive à un coefficient de diffusion ambipolaire perpendiculaire aux lignes de champ égal à :

$$D_a = \frac{k(T_e+T_i)}{m_i\nu_{in}\left(1+\frac{\omega_{bi}^2}{\nu_{in}^2}\right)+ m_e\nu_{en}\left(1+\frac{\omega_{be}^2}{\nu_{en}^2}\right)}$$

où T_e, T_i, m_e, m_i sont les températures et les masses électroniques et ioniques, ω_{be} et ω_{bi} sont les fréquences gyromagnétiques électronique et ionique et ν_{en} et ν_{in} les fréquences de collisions des électrons et des ions sur les neutres.

2. RESULTATS EXPERIMENTAUX

Il a été observé expérimentalement que les plasmas confinés par des champs magnétiques de type "multicusp" sont particulièrement calmes ; ces plasmas se prêtent donc bien à des expériences fondamentales de physique des plasmas[30] à [40].

Les caractéristiques de ces plasmas ont été étudiées, dans le cas où le champ magnétique multicusp est créé par des aimants ou par des fils de courant[1] à [15].

Dans ces dispositifs le plasma est créé par des électrons primaires émis par des filaments chauffés (2.500 à 2.800 °K) polarisés très négativement (de -50 à -100 Volts) ; ces électrons sont accélérés par les gaines qui se forment au voisinage des filaments, et ont donc une énergie de plusieurs dizaines d'électron-volts.

Limpaecher et ses collaborateurs[5] ont comparé la densité des plasmas obtenus dans deux enceintes d'un litre identiques, dont l'une est

tapissée d'aimants permanents et l'autre de barreaux non magnétiques, ces deux plasmas étant créés par des courants d'électrons primaires égaux (voir figure 1). Ils ont trouvé qu'à des pressions inférieures à 10^{-4} Torr les aimants font gagner au moins un facteur 100 à la densité, alors qu'à haute pression (supérieure à 10^{-2} Torr) les deux enceintes se comportent de la même façon.

Les pertes de particules à la paroi sont donc limitées par la présence d'un champ magnétique multicusp. Ceci est confirmé par le temps de décroissance de la densité du plasma quand on interrompt l'alimentation des filaments : ce temps est environ 10 fois plus long en présence d'aimants que dans l'enceinte traditionnelle. Cependant le facteur 10 dû à la limitation des pertes du plasma à la paroi ne suffit pas à expliquer l'accroissement de plus de deux ordres de grandeur de la densité. Il faut donc faire intervenir un autre facteur, qui est l'efficacité accrue des électrons primaires.

Leung et ses collaborateurs[7] ont étudié en détail la diffusion du plasma et des électrons primaires à travers le champ magnétique créé par une grille dont les fils sont parcourus par des courants de sens alternés (figure 2). A une pression de 8.10^{-4} Torr Leung a comparé les densités et les temps de vie de deux plasmas, l'un contenu dans l'enceinte amont, l'autre dans une enceinte de mêmes dimensions que cette enceinte amont, mais sans aimants ni fils de courant : la densité est 65 fois plus grande dans l'enceinte contenue dans le champ multicusp, alors que la durée de vie des ions n'est multipliée que par un facteur 3.

Parallèlement la comparaison des chemins effectifs parcourus par les électrons primaires dans l'enceinte montre que ces électrons parcourent, à cette même pression, un chemin environ 20 fois plus long.

Par conséquent le facteur 65 gagné sur la densité doit être attribué principalement au confinement des électrons primaires. D'autres études expérimentales tendent à confirmer le bon confinement des électrons primaires[10] à [12] et le confinement médiocre du plasma[13] à [15]. Pour étudier comment le plasma et les électrons primaires diffusent à travers le champ créé par la grille, Leung disposait de sondes des deux côtés de la grille. Comme le rayon gyromagnétique des ions est beaucoup plus grand que celui des électrons, on pourrait s'attendre à une séparation de charge, qui se traduirait par une variation de potentiel importante à la traversée des cusps. Or Leung n'a pas observé de telle variation : il n' y a donc pas de séparation de charge lors de la diffusion du plasma à travers le champ magnétique multicusp.

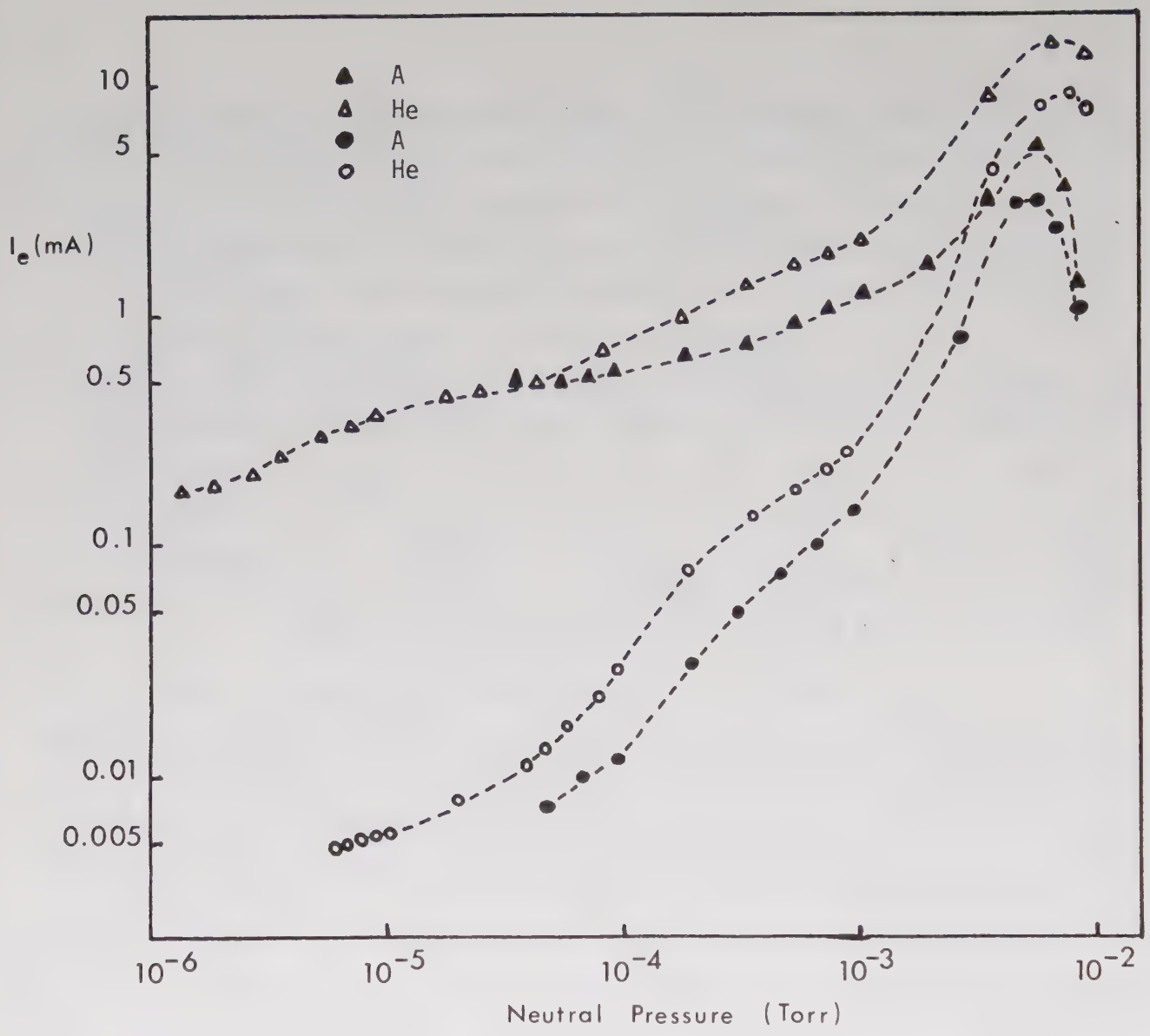


Figure I.1 - Densité, en fonction de la pression, de plasmas d'Argon et d'Hélium contenus dans des enceintes à parois magnétiques (triangles) ou non magnétiques (cercles).

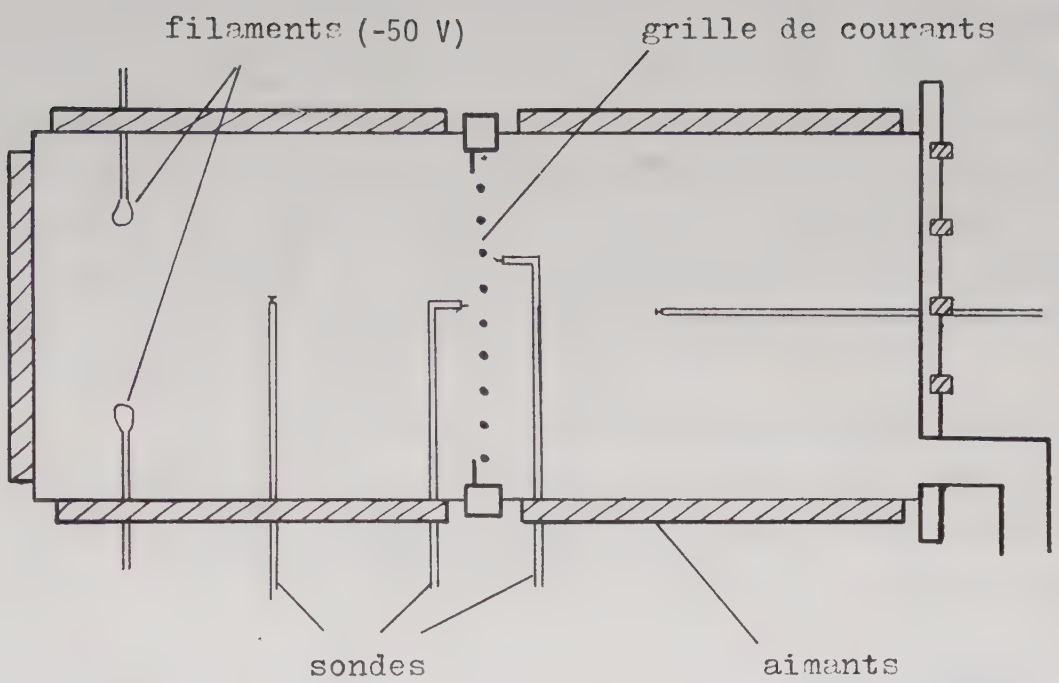


Figure I.2 - Dispositif utilisé par Leung pour étudier la diffusion d'un plasma à travers une grille de courants.

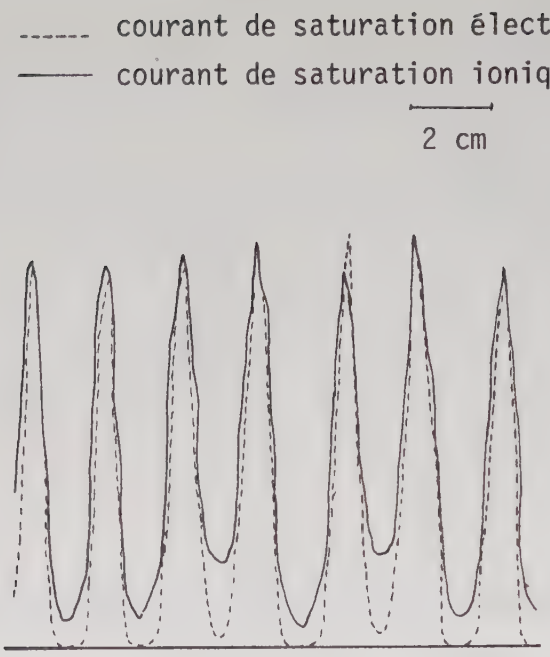


Figure I.3 - Courants de saturation électronique et ionique mesurés en aval de la grille, dans un plasma d'Argon sous une pression de 1.3 10^{-4} Torr ; le courant parcourant les fils est I = 800 A.

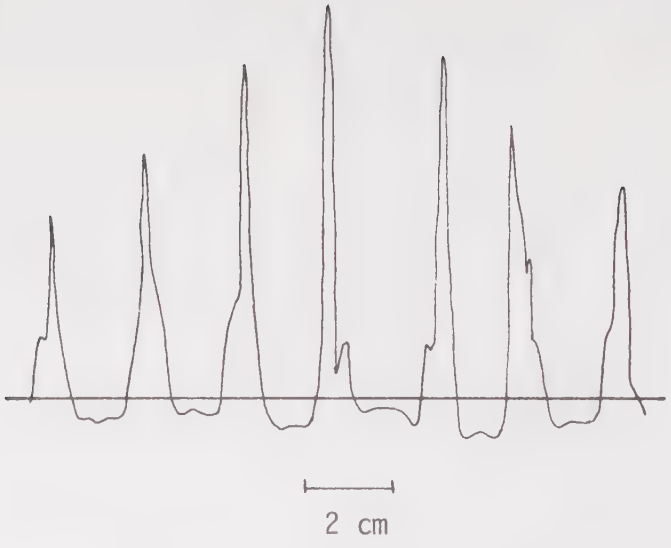
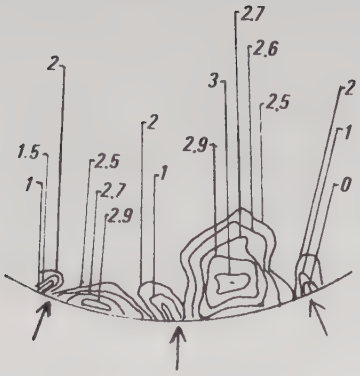


Figure I.4 - Profil de densité des électrons primaires, mesuré à une pression de 7 10^{-6} Torr , le courant parcourant les fils étant de 800 A.

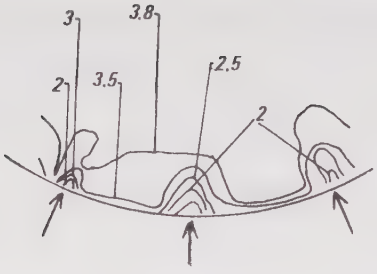
Ce résultat est confirmé par la comparaison des profils radiaux des courants de saturation électronique et ionique (le premier étant mesuré en polarisant la sonde juste au-dessus du potentiel plasma, le second en polarisant la sonde à -90 V) en aval de la grille. On trouve que ces profils sont identiques (figure 3), ce qui est bien compatible avec l'absence de séparation de charge. La largeur des pics du courant de saturation ionique donne l'ordre de grandeur de la largeur des trous par lesquels le plasma fuit. Leung trouve que cette largeur est peu différente de deux fois le rayon gyromagnétique hybride, ceci pour différents gaz.

La fuite des électrons primaires est étudiée par Leung en mesurant le courant d'électrons primaires juste en aval de la grille. Le profil radial de ce courant est représenté figure 4. La largeur des pics donne celle des trous par lesquels s'échappent les électrons primaires. Leung trouve que ces trous sont de l'ordre du rayon gyromagnétique électronique. Donc les électrons primaires sont beaucoup mieux confinés que le plasma. On peut introduire empiriquement des coefficients de réflexion pour les électrons primaires $\mathcal{R}_p$ et les électrons du plasma $\mathcal{R}_e$. Le champ magnétique de surface a donc pour effet de diminuer les flux d'électrons primaires et d'électrons du plasma respectivement d'un facteur $(1 - \mathcal{R}_p)$ et $(1 - \mathcal{R}_e)$. Le fait qu'il n'y ait pas de séparation de charge alors que les ions diffusent plus vite que les électrons à travers le champ magnétique amène à penser que le potentiel électrique doit, perpendiculairement au champ, retenir les ions et accélérer les électrons dans les régions de champ fort. Ceci est confirmé par les études de Hershkowitz[8], qui a réalisé un tracé des lignes équipotentielles et des lignes d'égale densité dans un plasma contenu dans un multipole (figure 5). Il trouve que le long d'un rayon qui traverse le cusp le potentiel décroît régulièrement alors qu'entre deux cusps, le potentiel commence par croître pour décroître à proximité immédiate de la paroi.

Pour expliquer la largeur des trous de fuite des ions, certains[22] ont fait appel à des instabilités acoustiques ioniques dues aux vitesses de dérive parallèles à $\vec{E} \times \vec{B}$. Des simulations numériques récentes[23] ont montré qu'il n'est peut-être pas nécessaire d'envisager ces instabilités pour rendre compte de la largeur des trous de fuite. Dans leur calcul Marcus et ses collaborateurs[23] ont utilisé un code de particules en cellules, à 2 dimensions (ce qui exclut donc toute influence des phénomènes de dérive) pour décrire l'évolution d'un plasma sans collisions dans un champ magnétique créé par une grille de courant, et tel que β soit très petit. Ils trouvent que le plasma atteint un régime stationnaire, dans lequel le potentiel électrostatique présente des ilots positifs devant les fils, alors qu'entre deux fils (dans un cusp) le



(a)



(b)

Figure I.5 - Lignes équipotentielles dans un plasma d'argon

(a) $p = 2.10^{-5}$ Torr

(b) $p = 6.10^{-5}$ Torr

Les flèches indiquent la position des cusps.

potentiel se creuse en un canal. Cette simulation rend donc bien compte des observations de Hershkowitz[8] sur le profil de potentiel. Les résultats sur les trous de fuite semblent montrer que la largeur de ces trous est plus proche du rayon de Larmor hybride que du rayon ionique ; cependant les valeurs des rapports des masses m_i/m_e et des températures T_i/T_e utilisées sont telles que ces deux rayons ne diffèrent que d'un facteur 2 environ. Cette simulation ne permet donc pas de conclure catégoriquement que la largeur des trous de fuite des ions est égale au rayon de Larmor hybride plutôt qu'au rayon de Larmor ionique.

D'autres types d'expériences semblent en contradiction avec celles de Leung et Hershkowitz. En effet quand dans une enceinte une paroi est tapissée d'aimants et une autre libre de tout confinement magnétique, on observe que le flux d'ions à travers le champ multicusp est inférieur de plusieurs ordres de grandeur au flux d'ions à travers l'autre paroi. On est donc tenté d'en déduire qu'une enceinte entièrement tapissée d'aimants confinera les ions dans les mêmes proportions. Cette conclusion est cependant hative, car elle ne tient pas compte des forces électriques qui apparaissent dans le second cas : dans la situation où une paroi est dépourvue d'aimants, la plus grande partie des ions est évacuée sur cette paroi ; le potentiel plasma est donc fixé par la diffusion à travers une paroi non magnétisée et il n'apparait pas de force électrique qui accélère les ions à travers les cusps. Dans un dispositif entièrement enfermé dans un champ multicusp au contraire, il apparaitra des forces électriques qui auront pour effet d'augmenter considérablement le flux d'ions à travers les cusps.

Nous montrerons dans cette étude que le champ électrique joue un rôle primordial dans le comportement du plasma, et qu'il est impossible d'évaluer l'effet du champ magnétique sur le plasma en faisant abstraction des forces électriques et des forces de pression cinétique.

CHAPITRE II

DECHARGE MULTIPOLAIRE

1. MODELE DE DECHARGE

Afin de comparer nos prévisions théoriques aux résultats expérimentaux dont nous disposons, nous calculerons numériquement les grandeurs issues de nos prévisions pour un plasma d'argon dont les caractéristiques sont les suivantes :

a) Caractéristiques du plasma

Le plasma est créé par collisions ionisantes d'électrons primaires émis par des filaments chauffés et polarisés négativement sur les atomes neutres.

- L'énergie des électrons primaires est : $eV_p = 50$ eV
- Le courant de décharge : $I_p < 500$ A
- La pression d'argon est : $p = 10^{-3}$ Torr
- La densité du plasma : $n = 10^{12}$ cm^{-3}
- Les températures électronique et ionique seront prises égales à 1 eV et 0.2 eV.

b) Caractéristiques de l'enceinte

Le plasma est contenu dans une enceinte cylindrique de longueur infinie et de rayon $R_o = 0.5$ m.

Sur ces génératrices sont disposés soit 2 m rangées d'aimants soit 2 m fils de courant (figures 1 et 2). Ces aimants ou ces fils de courant sont séparés du plasma par une coque conductrice de rayon $R_c = 0.492$ m. Dans les calculs on prendra 2 m = 56.

Toutes les grandeurs utiles (fréquences de collisions, coefficients de transport etc...) sont rassemblées dans l'Appendice O.

Dans le cas d'une structure multipolaire (créée par des aimants), ces caractéristiques correspondent au caisson à plasma du Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas d'Orsay sur lequel vont être effectuées des expériences d'interaction d'une onde électromagnétique avec un plasma présentant un gradient de densité. Ces expériences visent à simuler en caisson les phénomènes rencontrés en fusion laser ou lors des expériences de chauffage de l'ionosphère.

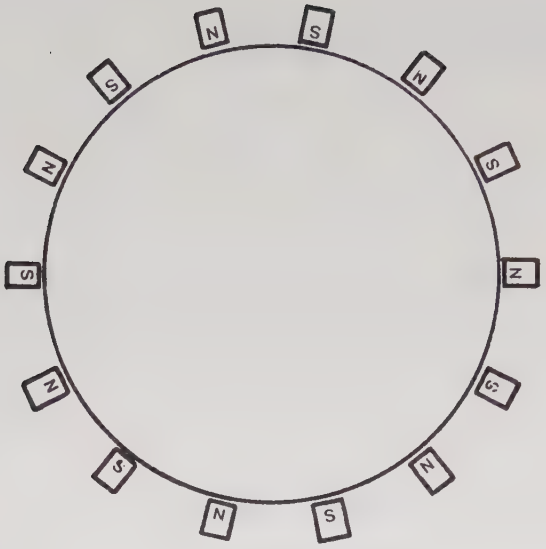


Figure II.1 - Enceinte tapissée d'aimants permanents.

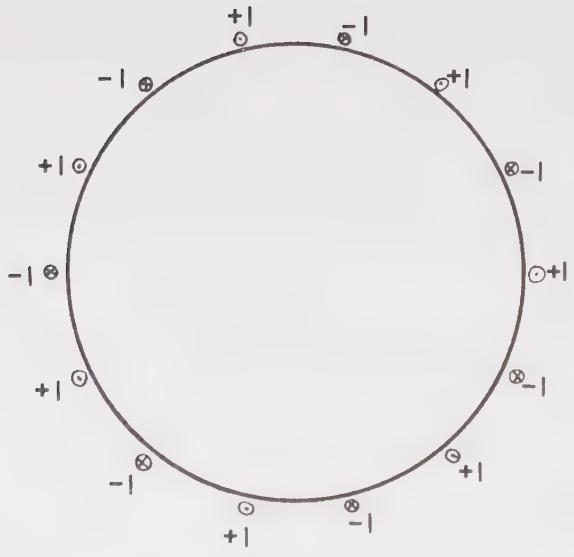


Figure II.2 - Enceinte tapissée de fils de courant.

2. GEOMETRIE DES CHAMPS MAGNETIQUES "MULTICUSP"

Nous allons rassembler dans ce paragraphe les propriétés des champs magnétiques de type "multicusp", créés soit par un ensemble d'aimants (figure 1) soit par un ensemble de fils (figure 2) disposés suivant les génératrices d'un cylindre de révolution. Le champ magnétique créé par ces systèmes est en tout point perpendiculaire à l'axe de révolution Oz du système.

2.1 - Rappels : Potentiel scalaire et potentiel vecteur
Lignes de champ et trajectoires orthogonales

Nous rappelons que le champ magnétique $\vec{B}$ peut être exprimé soit comme un rotationnel :

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$$

soit par un gradient (dans la région de l'espace vide de courants et de matière magnétisée) :

$$\vec{B} = -\,\text{grad}\,V$$

$\vec{A}$ et V sont respectivement le potentiel vecteur et le potentiel scalaire.

Dans le cas qui nous concerne le champ $\vec{B}$ n'a pas de composante suivant Oz. On peut donc rechercher le potentiel vecteur $\vec{A}$ sous la forme :

$$A_x = 0$$
$$A_y = 0$$
$$A_z = A_z(x,y)$$

Les composantes du champ $\vec{B}$ s'écrivent :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = 0$$

Le potentiel scalaire V(x,y) permet d'écrire les composantes de $\vec{B}$:

$$B_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$B_y = - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$B_z = 0$$

Selon que le champ est créé par des fils ou des aimants, il est plus facile de calculer le champ $\vec{B}$ par l'intermédiaire du potentiel vecteur $\vec{A}$ ou du potentiel scalaire V. Cependant dans tous les cas il sera utile de connaître les expressions des fonctions $A_z(x,y)$ et $V(x,y)$; en effet les lignes d'équation $A_z(x,y)$ = cste et $V(x,y)$ = cste sont respectivement les lignes de champ et leurs trajectoires orthogonales. Comme nous le verrons par la suite, la diffusion du plasma se fait de façon fondamentalement différente parallèlement ou perpendiculairement aux lignes de champ, c'est à dire le long des lignes $A_z(x,y)$ = cste ou des lignes $V(x,y)$ = cste. Nous verrons que ces lignes pourront servir de système de coordonnées pour résoudre l'équation de diffusion.

2.2 - Champ magnétique multipolaire

Nous allons étudier les propriétés du champ créé par 2 m aimants cylindriques de longueur infinie, de rayon a et d'aimantation uniforme J, disposés sur les génératrices d'un cylindre de révolution de rayon R_o. La disposition de ces aimants est représentée figure 1.

a) Symétries du champ

La figure 3 représente une section de multipole.

Entre les points M_o, M_1, M_2 et M_3, de coordonnées respectives (r,φ), $(r,-\varphi)$, $(r, \varphi + \pi/m)$ et $(r, \pi/m - \varphi)$ on a les relations :

$$B_r(r,-\varphi) = B_r(r,\varphi)$$

$$B_\varphi(r,-\varphi) = - B_\varphi(r,\varphi)$$

$$B_r(r,\varphi+\pi/m) = - B_r(r,\varphi)$$

$$B_\varphi(r, \varphi+\pi/m) = - B_\varphi(r,\varphi)$$

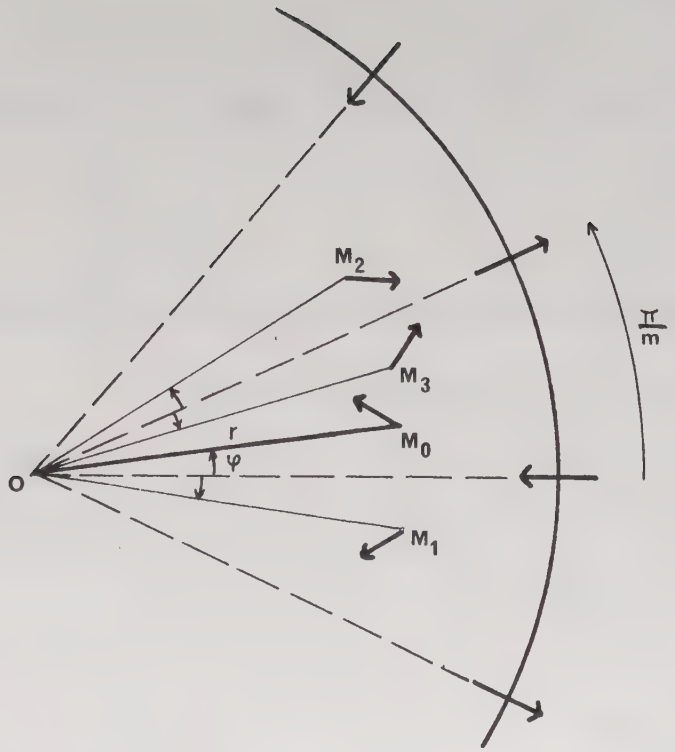


Figure II.3 - Symétries du champ magnétique multipolaire.

$$B_r(r,\pi/m-\varphi) = - B_r(r,\varphi)$$

$$B_\varphi(r,\pi/m-\varphi) = B_\varphi(r,\varphi)$$

Il suffira d'étudier le champ sur le domaine

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2m} ;$$

le champ dans le reste du multipole se déduira par les relations ci-dessus.

b) Calcul du potentiel scalaire

Le potentiel scalaire $V(r,\varphi)$ du champ magnétique créé par un barreau cylindrique infini de rayon a et d'aimantation J est :

$$V(r,\varphi) = 2\pi Ja^2 \frac{\sin\varphi}{r}$$

r et φ sont définis figure 4.

Le potentiel $V(r,\varphi)$ créé au point de coordonnées r et φ du multipole (figure 5) s'écrit :

$$V(r,\varphi) = 2\pi Ja^2 \sum_{p=1}^{2m} (-1)^p \frac{\sin \psi_p}{r_p}$$

où l'on a posé : $r = OM$

$$\varphi = (OA_1, OM)$$

$$r_p = A_pM$$

$$\psi_p = \frac{\pi}{2} - (OA_p, A_pM)$$

Les calculs, développés dans l'Appendice 1, amènent à :

$$V(M) = \frac{2\pi Ja^2}{R_o} m \frac{Shmz\ cosm\varphi}{Ch^2mz - cos^2m\varphi}$$

avec $\rho = \frac{r}{R_o}$

et $z = - Log\ \rho$

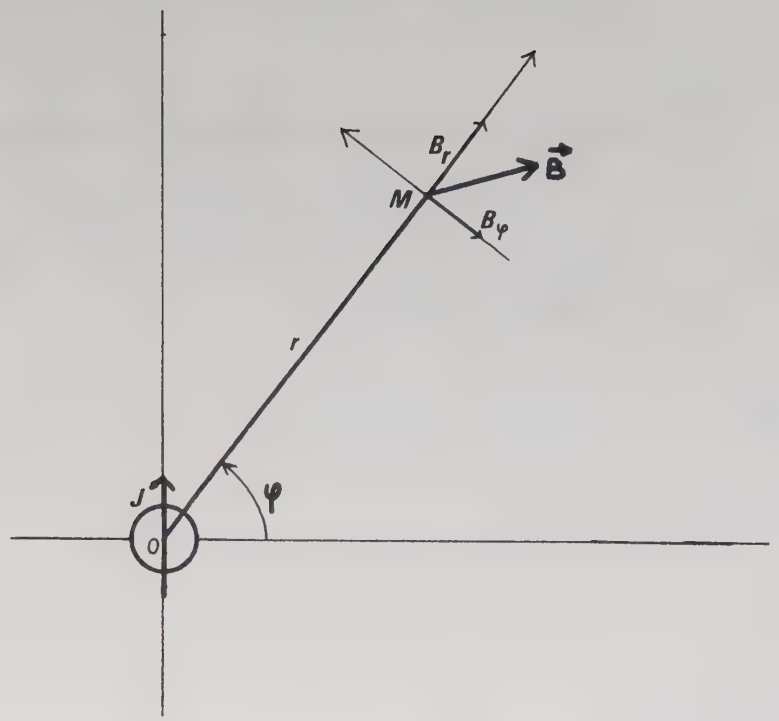


Figure II.4 - Champ magnétique créé par un barreau cylindrique d'aimantation uniforme J.

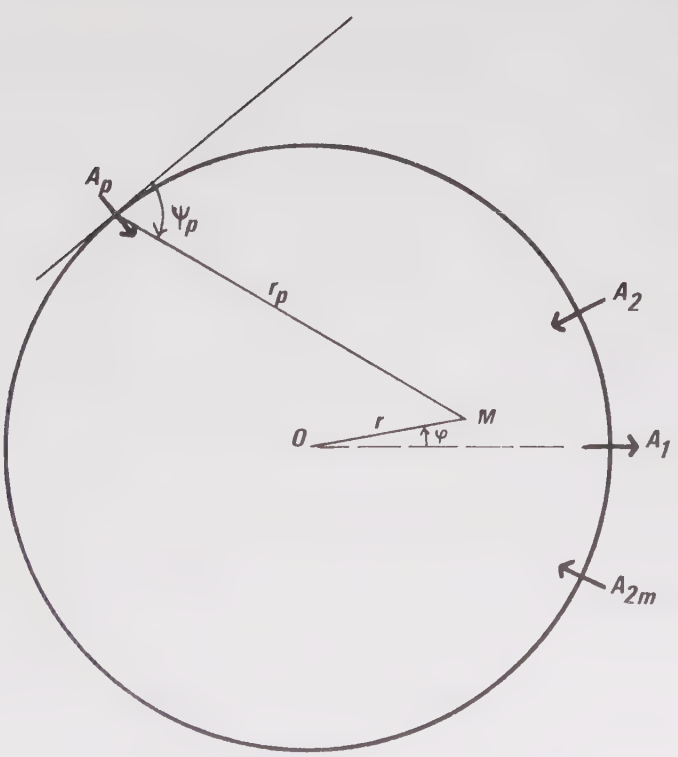


Figure II.5

c) Coordonnées réduites. Composantes du champ magnétique

L'expression de V(M) incite à choisir comme variables les grandeurs sans dimension mz et mφ.

Les composantes du champ $\vec{B}$:

$$B_r = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

et $$B_\varphi = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

peuvent s'écrire :

$$B_r = \frac{m}{R_o} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial (mz)}$$

$$B_\varphi = - \frac{m}{R_o} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial (m\varphi)}$$

V(M) peut s'écrire en fonction de la quantité

$$B_o = 2\pi J m^2 \frac{a^2}{R_o^2}$$

$$V(M) = \frac{R_o}{m} B_o \, \mu(mz, m\varphi)$$

avec $$\mu(mz, m\varphi) = \frac{Shmz \cos m\varphi}{Ch^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

En normalisant le champ magnétique à B_o, c'est à dire en posant :

$$\vec{B} = B_o \vec{b},$$

les composantes du champ réduit $\vec{b}$ s'écrivent simplement en fonction de μ :

$$b_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial (mz)}$$

$$b_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial (m\varphi)}$$

Les composantes du champ réduit ont pour expressions :

$$b_r = -\frac{1}{\rho} \operatorname{Ch} mz \cos m\varphi \frac{\operatorname{Sh}^2 mz - \sin^2 m\varphi}{(\operatorname{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2}$$

$$b_\varphi = \frac{1}{\rho} \operatorname{Sh} mz \sin m\varphi \frac{\operatorname{Ch}^2 mz + \cos^2 m\varphi}{(\operatorname{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2}$$

Le module du champ réduit

$$|b|^2 = |b_r|^2 + |b_\varphi|^2$$

s'écrit :

$$|b|^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\operatorname{Ch}^2 mz - \sin^2 m\varphi}{(\operatorname{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2}$$

d) Potentiel vecteur

Les composantes du champ $\vec{B}$ peuvent s'exprimer en fonction de $A_z(r,\varphi)$ par :

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

ou encore :

$$B_r = \frac{m}{R_o} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial (m\varphi)}$$

$$B_\varphi = \frac{m}{R_o} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial (mz)}$$

On peut écrire les composantes du champ réduit $\vec{b}$:

$$b_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial (m\varphi)}$$

$$b_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial (mz)}$$

Le calcul de $\lambda(mz,m\varphi)$ est mené dans l'Appendice 1 ; on arrive à :

$$\lambda(mz,m\varphi) = \frac{Chmz \sin m\varphi}{Ch^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

e) Expression du module du champ en fonction de λ et μ

Il sera utile de connaître l'expression de $|b|^2$ en fonction de λ et μ. Les calculs sont faits dans l'Appendice 1. On trouve que :

$$|b|^2 = \frac{1}{\rho^2} (\lambda^2 + \mu^2) \left[(\lambda^2 + \mu^2 - 1)^2 + 4\mu^2\right]^{1/2}$$

l'expression de ρ en fonction de λ et μ est donnée dans l'Appendice 1.

f) Passage à un système d'aimants disposés dans un plan

On peut déduire des expressions du champ créé par un système d'aimants disposés sur les génératrices d'un cylindre celles du champ créé par des rangées d'aimants parallèles disposés dans un plan en faisant tendre le rayon du cylindre R_o et le nombre d'aimants 2m vers l'infini, avec la relation :

$$\pi R_o = m \ell$$

où ℓ est la distance entre deux aimants.

En remplaçant dans les expressions de λ et μ $m\varphi$ par $\pi \frac{y}{\ell}$ et mz par $\pi \frac{x}{\ell}$ et en remarquant que ρ tend vers 1 quand le rayon du cylindre tend vers l'infini, on peut écrire :

$$\lambda(x,y) = \frac{Ch\ \pi x/\ell \sin \pi y/\ell}{Ch^2\ \pi x/\ell - \cos^2 \pi y/\ell}$$

$$\mu(x,y) = \frac{Sh\ \pi x/\ell \cos \pi y/\ell}{Ch^2\ \pi x/\ell - \cos^2 \pi y/\ell}$$

CONFIGURATION DE TYPE MULTIPOLAIRE

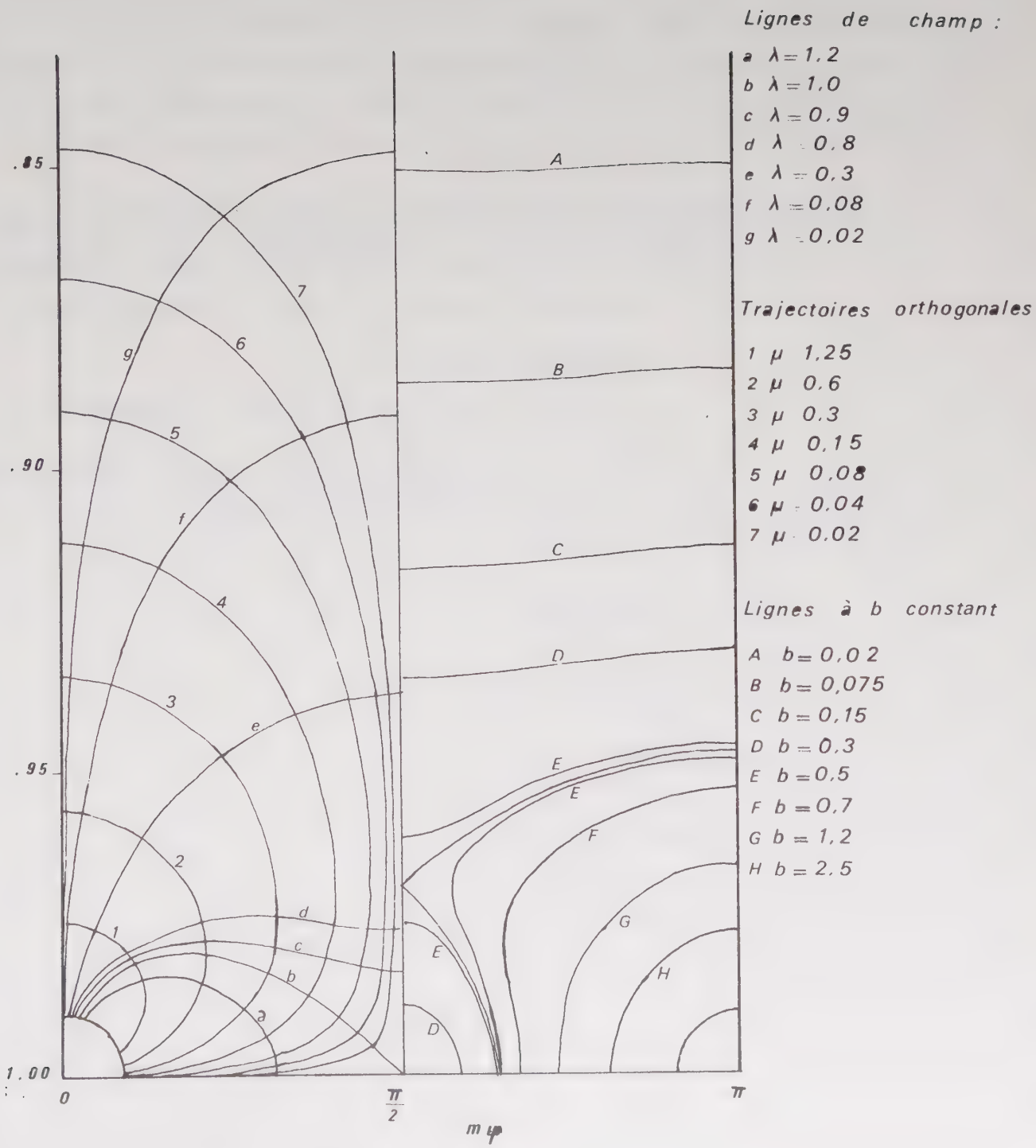


Figure II.6

g) Topographie du champ

Les lignes de champ, d'équation λ = cste et leurs trajectoires orthogonales, d'équation μ = cste, sont représentées figure 6, ainsi que les lignes d'équation b = cste. Les cusps sont localisés au voisinage des aimants.

On remarque que b passe par un col entre les cusps (c'est à dire le long de la ligne $m\varphi = \pi/2$) égal environ à 1/2. Le champ magnétique B passe donc par un col, où le champ vaut $B_{col} = B_o/2$. Nous verrons par la suite que c'est cette valeur du champ au col qui déterminera les pertes de plasma à travers le champ : si B_{col} est assez fort pour magnétiser les électrons, et donc les réfléchir, les pertes n'auront lieu que sur les aimants. Dans le cas contraire le plasma diffusera entre les cusps et ne sera que très mal confiné.

2.3 - Champ magnétique créé par des fils disposés suivant les génératrices d'un cylindre de révolution parcouru par des intensités opposées

La disposition de ces fils est représentée figure 2.

a) Symétries du champ

La figure 7 représente une section du dispositif.

On a les relations de symétrie suivantes entre les champs aux points M_o, M_1, M_2 et M_3 de coordonnées respectives (r,φ), $(r,-\varphi)$, $(r,\varphi+\pi/m)$ et $(r, \pi/m - \varphi)$:

$$B_r(r,-\varphi) = - B_r(r,\varphi)$$

$$B_\varphi(r,-\varphi) = B_\varphi(r,\varphi)$$

$$B_r(r, \tfrac{\pi}{m} + \varphi) = - B_r(r,\varphi)$$

$$B_\varphi(r, \tfrac{\pi}{m} + \varphi) = - B_\varphi(r,\varphi)$$

$$B_r(r, \tfrac{\pi}{m} - \varphi) = B_r(r,\varphi)$$

$$B_\varphi(r, \tfrac{\pi}{m} - \varphi) = - B_\varphi(r,\varphi)$$

Ces relations permettent de limiter l'étude du champ $\vec{B}$ au secteur défini par $0 < \varphi < \pi/2m$.

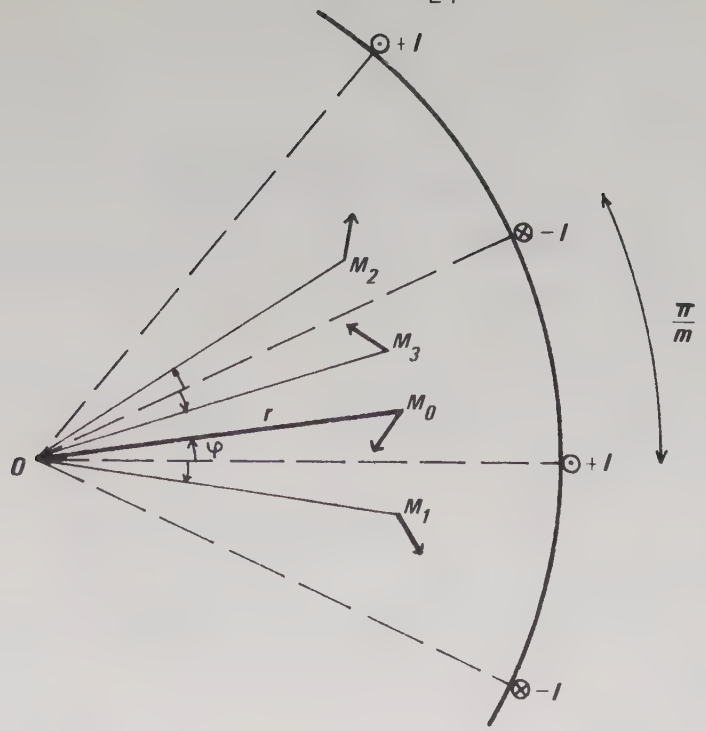


Figure II.7 - Symétries du champ magnétique créé par des fils de courant.

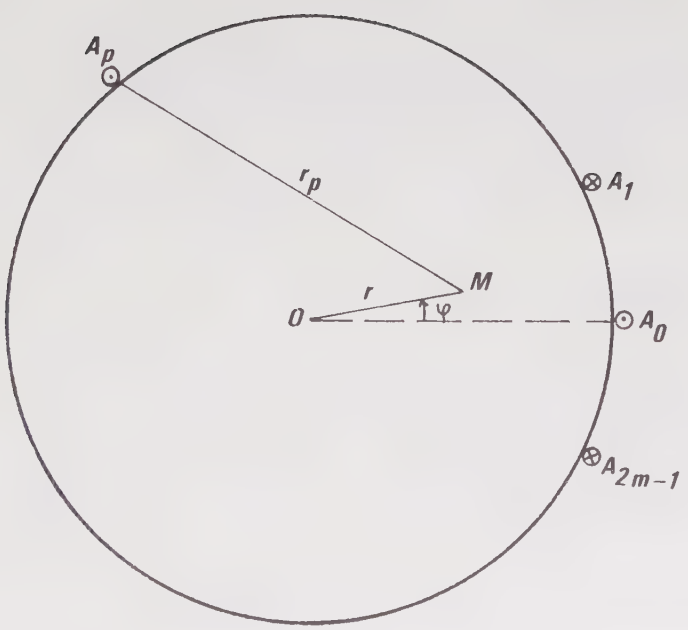


Figure II.8

b) Calcul du potentiel vecteur

Le potentiel vecteur $A_z(r,\varphi)$ créé au point M de coordonnées (r,φ) (voir figure 8) s'écrit :

$$A_z(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \sum_{p=o}^{2m-1} (-1)^p \text{ Log } r_p$$

où l'on a posé $r_p = A_p M$

Les calculs menés dans l'Appendice 2, donnent :

$$A_z(M) = - \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{ Arg Th } \left(\frac{\cos m\varphi}{\text{Ch } mz}\right)$$

où z est défini par $z = - \text{ Log } \rho$

avec $\rho = \frac{r}{R_o}$

c) Composantes du champ magnétique

Là encore on peut choisir mz et $m\varphi$ comme variables réduites ; si l'on pose $B_o = m \frac{\mu_o I}{2\pi R_o}$, le champ $\vec{B}$ peut s'écrire : $\vec{B} = B_o \vec{b}$

Les composantes de $\vec{b}$ se mettent sous la forme :

$$b_r = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial (m\varphi)}$$

$$b_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial (mz)}$$

avec $\lambda(mz,m\varphi) = \text{Arg Th } \left(\frac{\cos m\varphi}{\text{Ch } mz}\right)$

Les composantes de $\vec{b}$ s'écrivent :

$$b_r = - \frac{1}{\rho} \frac{\sin m\varphi \, . \, \text{Ch } mz}{\text{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

$$b_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\cos m\varphi . \text{Sh } mz}{\text{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

Le carré du module de b :

$b^2 = b_r^2 + b_\varphi^2$ s'écrit :

$$b^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{Ch^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

d) Potentiel scalaire

Les composantes de $\vec{b}$ peuvent encore s'écrire :

$$b_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial (mz)}$$

$$b_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial (m\varphi)}$$

μ est calculé dans l'Appendice 2. On trouve :

$$\mu (mz, m\varphi) = \text{Arc tg} \frac{\sin m\varphi}{\text{Sh } mz}$$

e) Expression du module du champ en fonction de λ et μ

$|b|^2$ s'écrit simplement en fonction de λ et μ :

$$|b|^2 = \frac{1}{\rho^2} (Sh^2 \lambda + \sin^2 \mu).$$

f) Passage à un système plan de fils parallèles

On déduit du cas cylindrique le cas de fils disposés dans un même plan parallèlement entre eux en faisant tendre ρ vers 1 et R_o et m vers l'infini avec la relation

$$m\ell = \pi R_o$$

où ℓ est l'espacement entre les fils.

Il suffit donc de remplacer $m\varphi$ par $\pi \frac{y}{\ell}$ et mz par $\pi \frac{x}{\ell}$; on arrive à :

$$\lambda(x,y) = \text{Arg Th}\left(\frac{\cos \pi \frac{y}{\ell}}{\text{Ch } \pi \frac{x}{\ell}}\right)$$

$$\mu(x,y) = \text{Arg tg}\left(\frac{\sin \pi \frac{y}{\ell}}{\text{Sh } \pi \frac{x}{\ell}}\right)$$

g) Topographie du champ

Les lignes de champ et leurs trajectoires orthogonales sont représentées figure 9. Les cusps sont localisés entre les fils. On remarque que dans cette configuration $|b|$ croît de façon monotone entre les curps (le long de la ligne $m\varphi = 0$). Les fuites de particules magnétisées se feront donc uniquement à travers les cusps.

On peut remarquer qu'entre deux fils, c'est à dire au centre du cusp, $|b| = 1$. B_0 est donc la valeur du champ magnétique au cusp.

CONFIGURATION DU TYPE "GRILLE DE COURANTS"

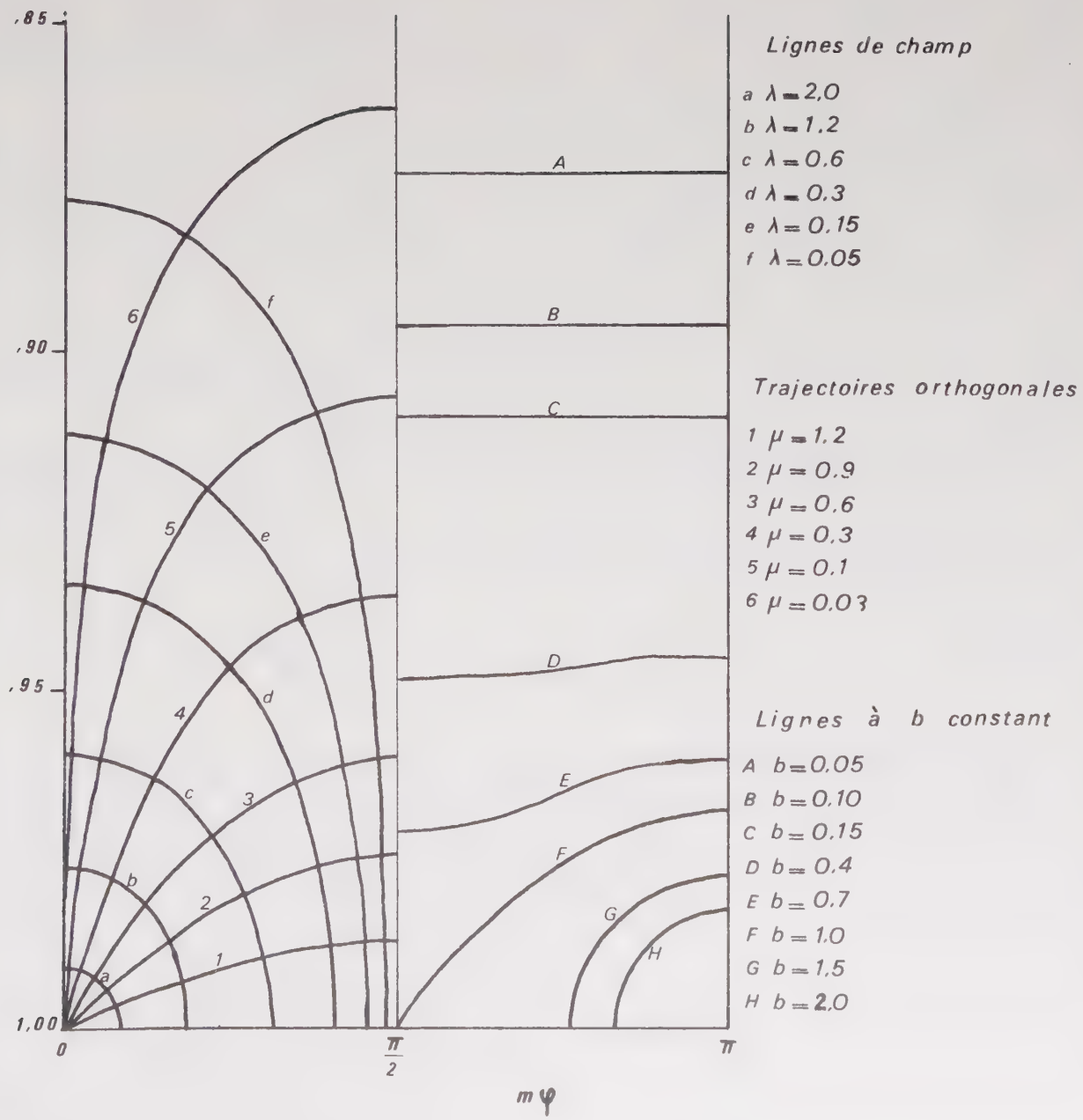


Figure II.9

CHAPITRE III

DESCRIPTION PHENOMENOLOGIQUE D'UNE DECHARGE MULTIPOLAIRE

Nous allons essayer de décrire une décharge confinée par un champ magnétique de surface du type de ceux que nous venons d'étudier, sans rentrer dans le détail des mécanismes qui interviennent dans la région magnétisée : nous schématiserons les effets du champ magnétique par des coefficients de réflexion pour les électrons primaires ($\mathcal{R}_p$) et pour les électrons du plasma ($\mathcal{R}_e$).

1. RAPPEL : DECHARGE CLASSIQUE

On considère une enceinte cylindrique de rayon R_o et de longueur infinie dans laquelle un plasma est créé par des électrons rapides, de vitesse v_p et de densité uniforme n_p. S et V représenteront la surface latérale et le volume par unité de longueur du cylindre : $S = 2\pi R_o$ et $V = \pi R_o^2$.

On peut traiter une telle décharge de plusieurs façons :

1.1 - Hypothèses de diffusion ambipolaire[24]

Elles consistent à écrire que les flux d'ions et d'électrons sont égaux, c'est à dire à négliger le flux de conduction devant les flux d'ions et d'électrons à la paroi.

On arrive alors à un profil de densité de la forme

$$n(r) = n(o) - \frac{\alpha^o}{4D_a} r^2 \qquad \text{(III.1)}$$

où $\alpha^o = n_p^o \nu_i$, n_p^o désignant la densité d'électrons primaires en l'absence de champ magnétique et D_a est le coefficient de diffusion ambipolaire, qui s'exprime en fonction des mobilités ionique et électronique μ_i et μ_e et des coefficients de diffusion des ions et des électrons D_i et D_e par

$$D_a = \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_e + \mu_i}$$

Pour déterminer la constante n(0), on écrit que la densité à la paroi est nulle ($n(R_o) = 0$), ce qui donne $n(0) = \frac{\alpha^o}{4D_a} R_o^2$.

L'hypothèse de diffusion ambipolaire contient le fait que le flux d'ions ou d'électrons évacués à la paroi est égal au nombre d'ions ou d'électrons créés dans le volume de la décharge.

En effet les flux s'écrivent

$$\Gamma = - D_a (\nabla n)_{r=R_o}$$

de (III.1) on tire $\nabla n = - \frac{\alpha^o}{2D_a} r$

et le flux à travers la paroi s'écrit par unité de longueur

$$\Gamma \times 2\pi R_o = \alpha^o \frac{R_o}{2} \times 2\pi R_o$$

Le second membre n'est autre que $\alpha^o V$, c'est à dire le nombre d'ions ou d'électrons créés dans le volume.

Par conséquent cette théorie ne permettra pas d'utiliser le fait que les flux sont limités à la paroi pour calculer l'augmentation de densité due au confinement des particules.

1.2 - Hypothèses de Tonks et Langmuir[25]

Dans le même domaine de pression, Tonks et Langmuir ont fait les hypothèses suivantes :

. les électrons sont en équilibre de Boltzmann avec le potentiel ϕ à la température T_e

$n_e^o(r) = n_e^o(o) \exp\left(\frac{e\,\phi(r)}{kT_e}\right)$ si l'on suppose qu'au centre $\phi(o) = 0$.

. les ions diffusent vers la paroi à la vitesse $\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$ où μ_i est la mobilité des ions et $\vec{E} = - \vec{\nabla}\phi$ est le champ électrique self consistent.

Cette hypothèse est valable dans le domaine de pression où le libre parcours moyen des ions est inférieur aux dimensions de l'enceinte. Pour une température ionique de 0.2 eV dans un plasma d'argon et une enceinte de 50 cm de rayon on trouve que la pression doit être supérieure à 10^{-4} Torr.

On peut résoudre le problème en écrivant :

. d'une part la quasi-neutralité, en négligeant la densité des électrons primaires devant celle des électrons du plasma (on verra plus loin le domaine de validité de cette approximation)

$$n_e^o(r) = n_i^o(r) = n^o(r)$$

. d'autre part que le nombre d'ions créés par unité de temps dans un cylindre de rayon r et de longueur unité en sort à la vitesse $v_i(r)$:

$$\pi r^2 \alpha^o = 2\pi r\, n_i^o(r) v_i(r)$$

soit, avec $v_i(r) = -\mu_i \left(\frac{d\phi}{dr}\right)_r$

$$n_i^o(r) = \frac{-\alpha^o r}{2\mu_i \frac{d\phi}{dr}}$$

Les indices ^{o} désignent les quantités en l'absence de champ magnétique.

En éliminant le potentiel ϕ, on arrive à

$$n^o(r) = n^o(o) - \frac{T_i}{T_e} \frac{\alpha^o}{4D_i} r^2 \qquad \text{(III.2)}$$

Il reste à déterminer α^o et $n^o(o)$, ce que l'on peut faire en écrivant :

- l'équation de conservation des électrons primaires

$$\frac{I_p}{e} = n_p^o \nu_i V + n_p^o v_p S \qquad \text{(III.3)}$$

Le premier terme rend compte des pertes par ionisation, le second des pertes à la surface.

- l'équation de conservation des électrons du plasma :

$$\alpha^o V = \frac{1}{4} n^o(R_o) v_{the} S \qquad \text{(III.4)}$$

v_{the} est la vitesse thermique des électrons : $v_{the} = \left(\frac{8}{\pi} \frac{kT_e}{m_e}\right)^{1/2}$.

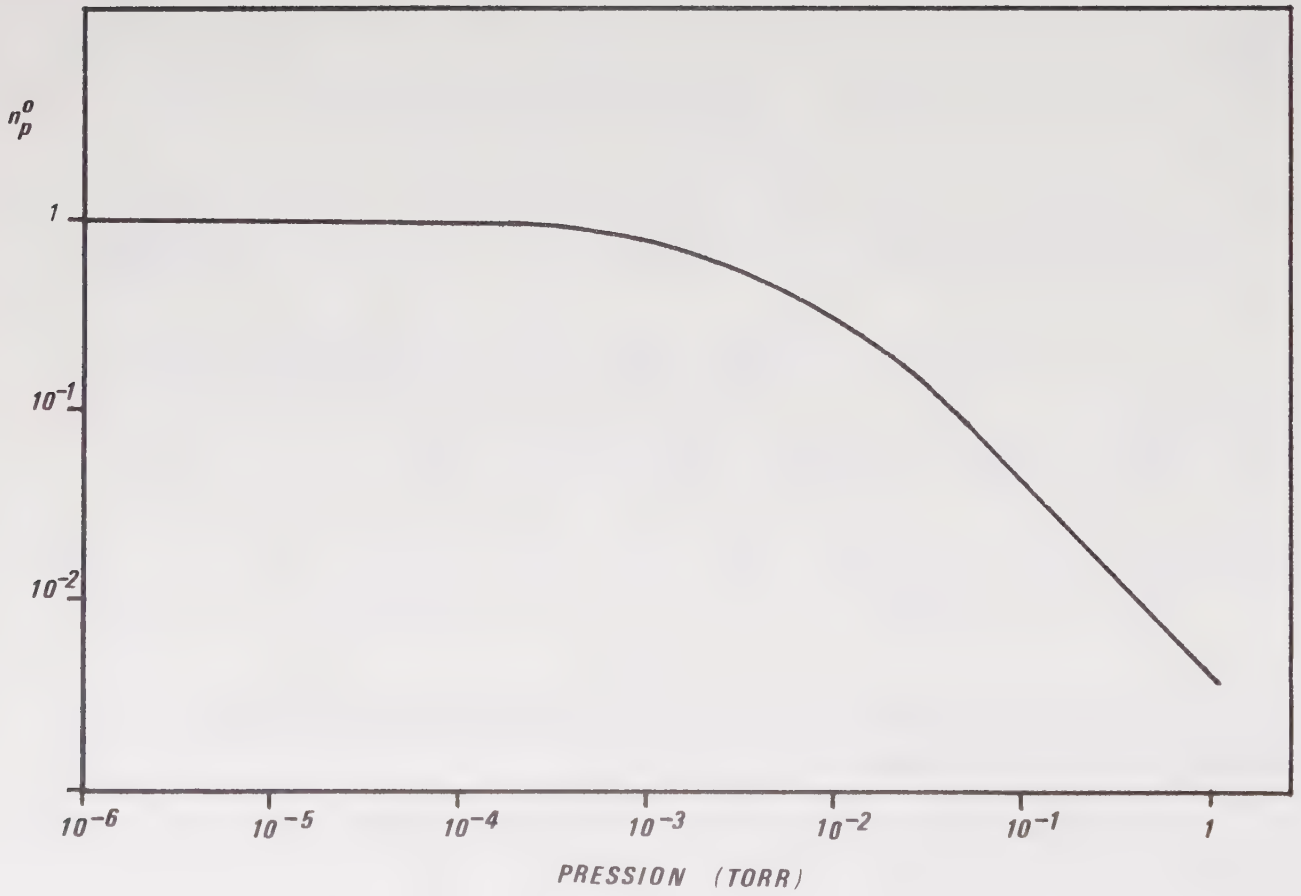


Figure III.1 - Variations de la densité d'électrons primaires en fonction de la pression, en l'absence de champ magnétique.

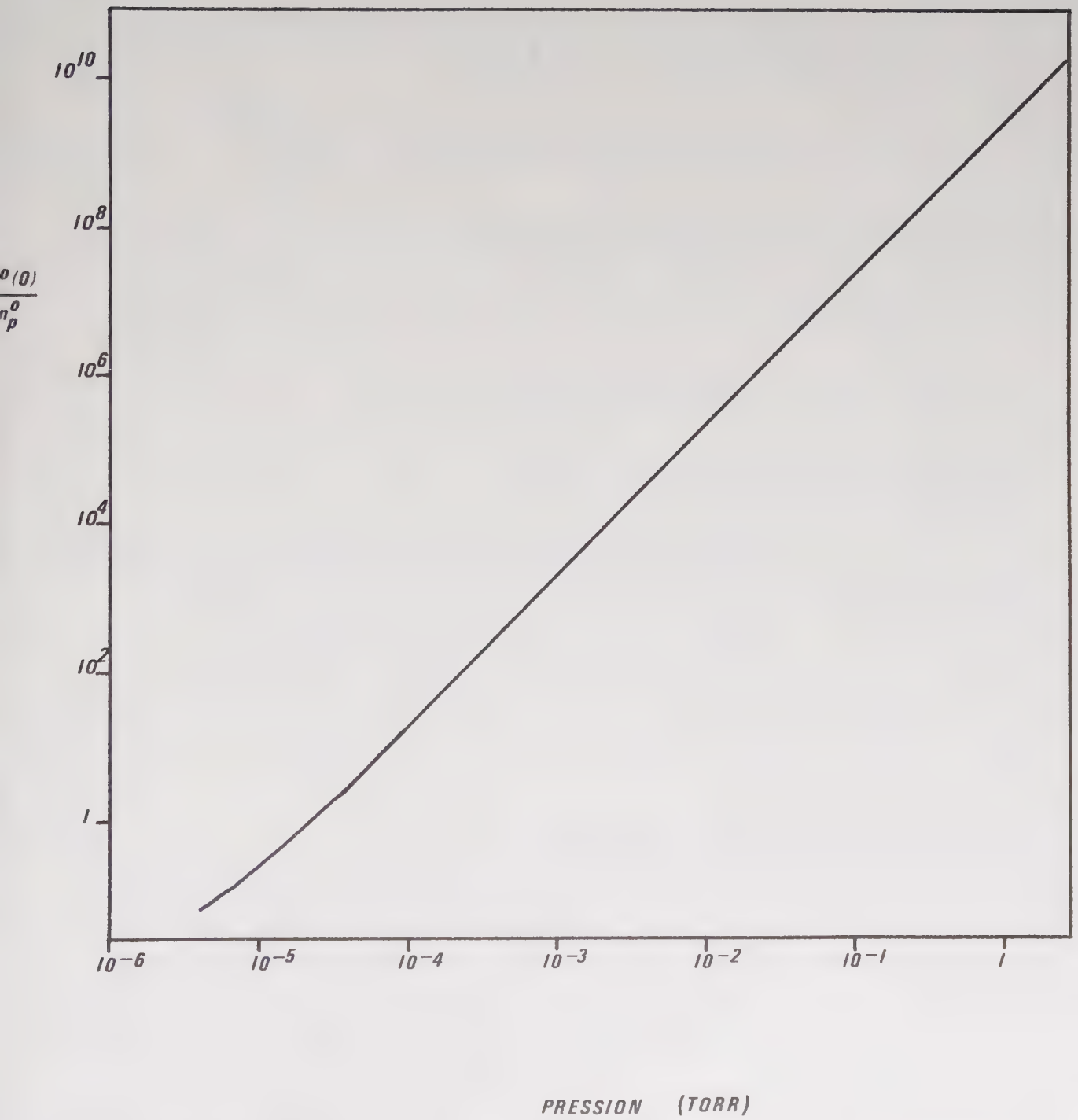


Figure III.2 - Rapport de la densité au centre à la densité d'électrons primaires en fonction de la pression, en l'absence de champ magnétique.

L'équation (III.3) permet de calculer n_p^o en fonction de la pression, pour un courant I_p donné. La figure 1 représente les variations de n_p^o réduite à sa valeur à pression nulle, en fonction de la pression. On voit que les pertes en volume commencent à intervenir pour des pressions supérieures à 5.10^{-3} Torr environ.

Des équations (III.2) et (III.4) on tire la valeur de la densité au centre :

$$n^o(o) = \frac{T_i}{T_e} \frac{\nu_i n_p^o}{4D_i} R_o^2 \left(1 + 8 \frac{T_e}{T_i} \frac{D_i}{R_o v_{the}}\right)$$

La figure 2 montre les variations de $\frac{n^o(o)}{n_p^o}$

On voit que l'approximation

$$n_p << n^o(o)$$

est valable pour des pressions supérieures à 10^{-4} Torr.

2. INFLUENCE DU CHAMP MAGNETIQUE DE SURFACE

Le champ magnétique introduit des coefficients de réflexion $\mathcal{R}_p$ et $\mathcal{R}_e$ pour les électrons primaires et les électrons du plasma.

Les équations (III.3) et (III.4) s'écrivent :

$$\frac{I_p}{e} = \alpha V + n_p v_p (1 - \mathcal{R}_p) S \qquad \text{(III.3')}$$

$$\alpha V = \frac{1}{4} n(R_o)\, v_{the}\, (1 - \mathcal{R}_e) S \qquad \text{(III.4')}$$

Ces équations conduisent à

$$n(o) = \frac{T_i}{T_e} \frac{\alpha}{4D_i} R^2 \left(1 + 8 \frac{T_e}{T_i} \frac{D_i}{R v_{the}(1 - \mathcal{R}_e)}\right)$$

avec $$\alpha = \frac{I_e}{e} \frac{\nu_i}{\nu_i V + v_p S(1-\mathcal{R}_p)}$$

L'effet du champ magnétique peut être décrit par le rapport

$$\frac{n(o)}{n^o(o)}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{n(o)}{n^o(o)} = \tau . d$$

où $\tau = \frac{\alpha}{\alpha^o}$ rend compte du confinement des électrons primaires, alors que d représente l'augmentation relative de densité au centre si l'on fixe le terme d'ionisation à sa valeur α^o en l'absence de champ magnétique : d décrit donc le confinement des électrons du plasma.

τ et d ont pour expressions :

$$\tau = 1 + \frac{p}{(1-\mathcal{R}_p) + \frac{\nu_i V}{S v_p}}$$

et $$d = \frac{\frac{T_i}{T_e} \frac{R_o v_{the}}{8 D_i} + \frac{1}{1-\mathcal{R}_e}}{\frac{T_i}{T_e} \frac{R_o v_{the}}{8 D_i} + 1}$$

La figure 3 représente les variations de τ, en fonction de la pression, pour des valeurs de $(1-\mathcal{R}_p)$ égales à 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} et 10^{-4}, et pour des pressions comprises entre 10^{-6} Torr et 1 Torr. On voit que le confinement par le champ magnétique intervient pour des pressions inférieures à $5\ 10^{-3}$ Torr, ce qui est bien compatible avec le fait qu'à plus haute pression les électrons primaires disparaissent essentiellement par collisions.

Les variations de d en fonction de la pression sont représentées figure 4, pour des valeurs de $(1-\mathcal{R}_e)$ égales à 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} et 10^{-4} et pour des pressions comprises entre 10^{-4} Torr et 1 Torr.

Figure III.3 - Variations de r en fonction de la pression, pour différentes valeurs de $\mathcal{R}_p$.

(a) : $1 - \mathcal{R}_p = 1$
(b) : $1 - \mathcal{R}_p = 10^{-1}$
(c) : $1 - \mathcal{R}_p = 10^{-2}$
(d) : $1 - \mathcal{R}_p = 10^{-3}$
(e) : $1 - \mathcal{R}_p = 10^{-4}$

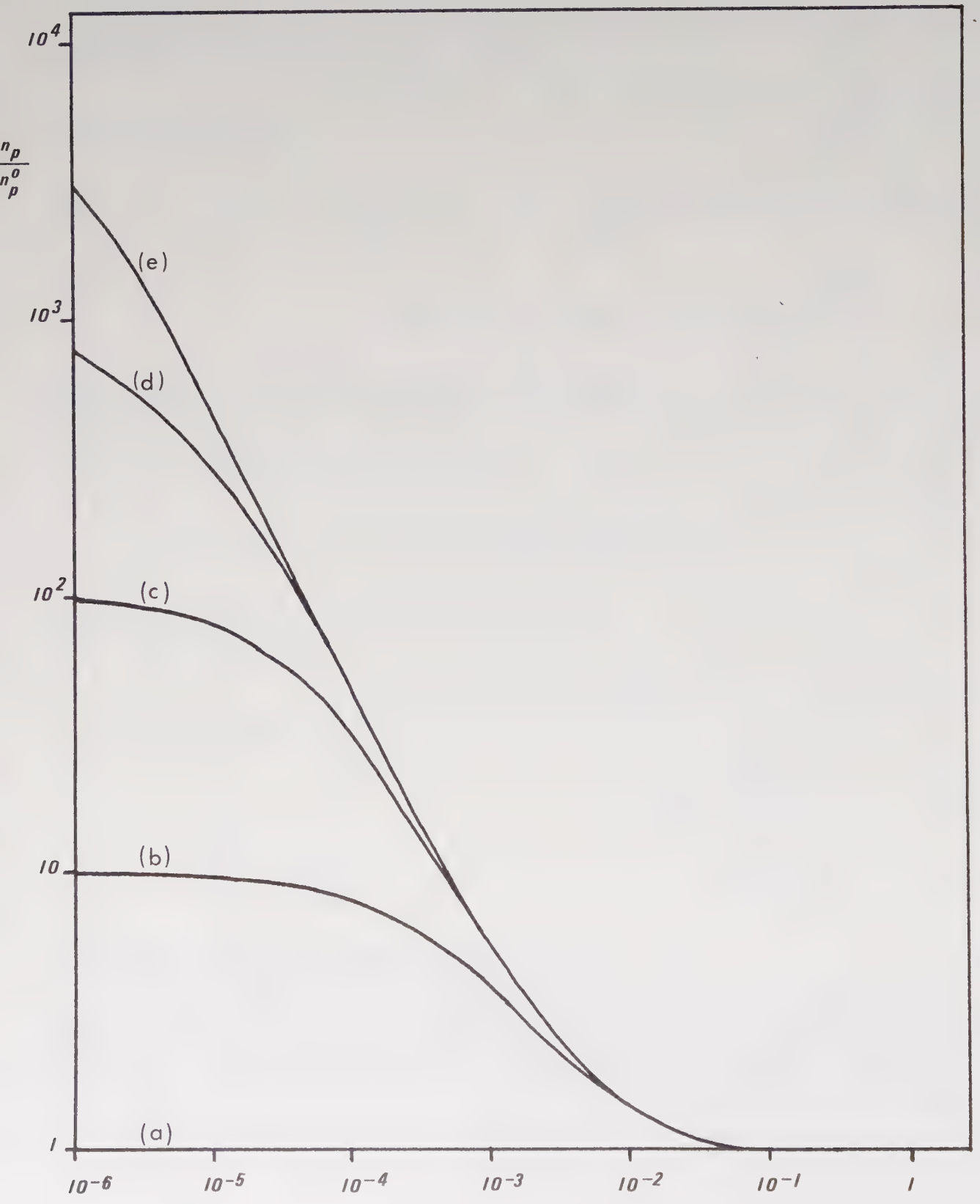
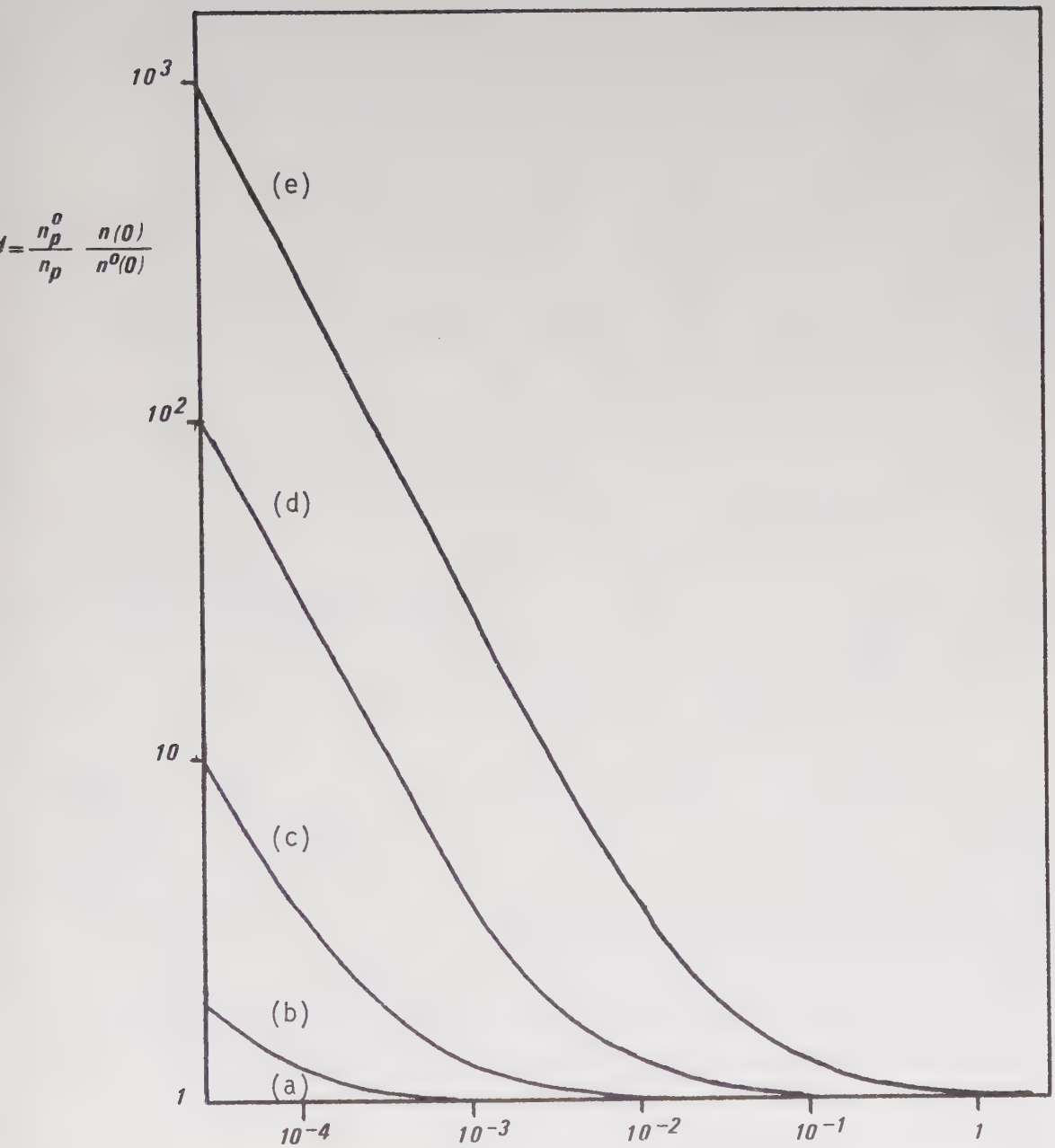


Figure III.4 - Variations de d en fonction de la pression, pour différentes valeurs de $\mathcal{R}_e$.

(a) : $1 - \mathcal{R}_e = 1$
(b) : $1 - \mathcal{R}_e = 10^{-1}$
(c) : $1 - \mathcal{R}_e = 10^{-2}$
(d) : $1 - \mathcal{R}_e = 10^{-3}$
(e) : $1 - \mathcal{R}_e = 10^{-4}$



Ces courbes montrent que l'on a intérêt à réaliser la décharge à une pression inférieure à 5.10^{-3} Torr environ, pour que la limitation des pertes de particules à la paroi entraine une augmentation de densité (τ et d sont supérieurs à 1). Dans la suite nous nous placerons donc à une pression de 10^{-3} Torr.

Il ressort des variations de τ et d que les augmentations relatives de densité dues au confinement des électrons primaires et du plasma dépendent fortement des coefficients de réflexion $\mathcal{R}_p$ et $\mathcal{R}_e$. Il importe donc d'évaluer ces coefficients ; pour cela il faut étudier le comportement des particules chargées dans la région magnétisée. Il faut remarquer ici que l'on ne peut pas faire cette étude en utilisant la théorie adiabatique : en effet une particule chargée traverse des régions où le champ magnétique est très faible, de sorte que le rapport du rayon gyromagnétique d'une particule de masse m, de charge q et de vitesse v à la longueur caractéristique L du champ, égal à $\frac{mv}{qBL}$ peut devenir égal ou supérieur à 1.

Il faut donc utiliser d'autres approches pour étudier le mouvement des particules à travers la gaine magnétisée.

Les électrons et les ions du plasma diffusent de façon liée à travers le champ magnétique ; dans le domaine de pression que nous envisagrons, leurs libres parcours moyens sont inférieurs aux dimensions de l'enceinte. Nous ferons donc un calcul de diffusion ambipolaire du plasma à travers la région magnétisée.

Les électrons primaires ne sont soumis qu'à l'action du champ magnétique. En effet les différences de potentiel qui peuvent apparaître dans la décharge ne sont que de l'ordre du volt ; les électrons primaires, dont l'énergie est d'une cinquantaine d'électron-volts, seront insensibles au champ électrique susceptible d'apparaître.

Nous étudierons d'une part le mouvement des électrons primaires dans un champ magnétique, d'autre part la diffusion ambipolaire des électrons et des ions du plasma à travers la gaine magnétisée.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS UN CHAMP MAGNETIQUE

1. HYPOTHESES SUR LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES ET LEUR FONCTION DE DISTRIBUTION DES VITESSES DANS LA REGION DE CHAMP NUL

On considère que la densité des électrons primaires est uniforme et égale à n_p dans toute la région où ils ne sont pas magnétisés.

D'autre part, on suppose que les électrons primaires sont émis des filaments avec une vitesse pratiquement nulle ; ils sont ensuite accélérés dans la gaine formée au voisinage de chaque filament du fait de leur polarisation à -50 V. Les électrons primaires pénètrent donc dans le plasma avec une vitesse de module $v_{po} = \left(\frac{2e\ V_p}{m}\right)^{1/2}$, (où les filaments sont polarisés à $-V_p$). On considèrera d'autre part que la répartition des vitesses est isotrope.

2. INVARIANTS DU MOUVEMENT

Comme nous l'avons vu, un électron primaire ne ressent que le champ magnétique. Son mouvement est déterminé par

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - e\vec{v} \times \vec{B} \qquad (IV.1)$$

Les trajectoires de particules chargées ont été étudiées dans un champ magnétique quadripolaire[26],[27] qui règne entre deux bobines (fig. 1) parcourues par des courants opposés. Il a été montré que le grand rapport de miroir qui règne dans le cusp fait que le moment magnétique des particules varie au cours du temps.

On ne peut donc pas utiliser le moment magnétique comme invariant du mouvement, et l'on ne peut étudier les trajectoires que par des simulations numériques[27] (figure 2).

On peut cependant déterminer certaines propriétés du mouvement en remarquant que la composante suivant Oz de (IV.1) s'écrit :

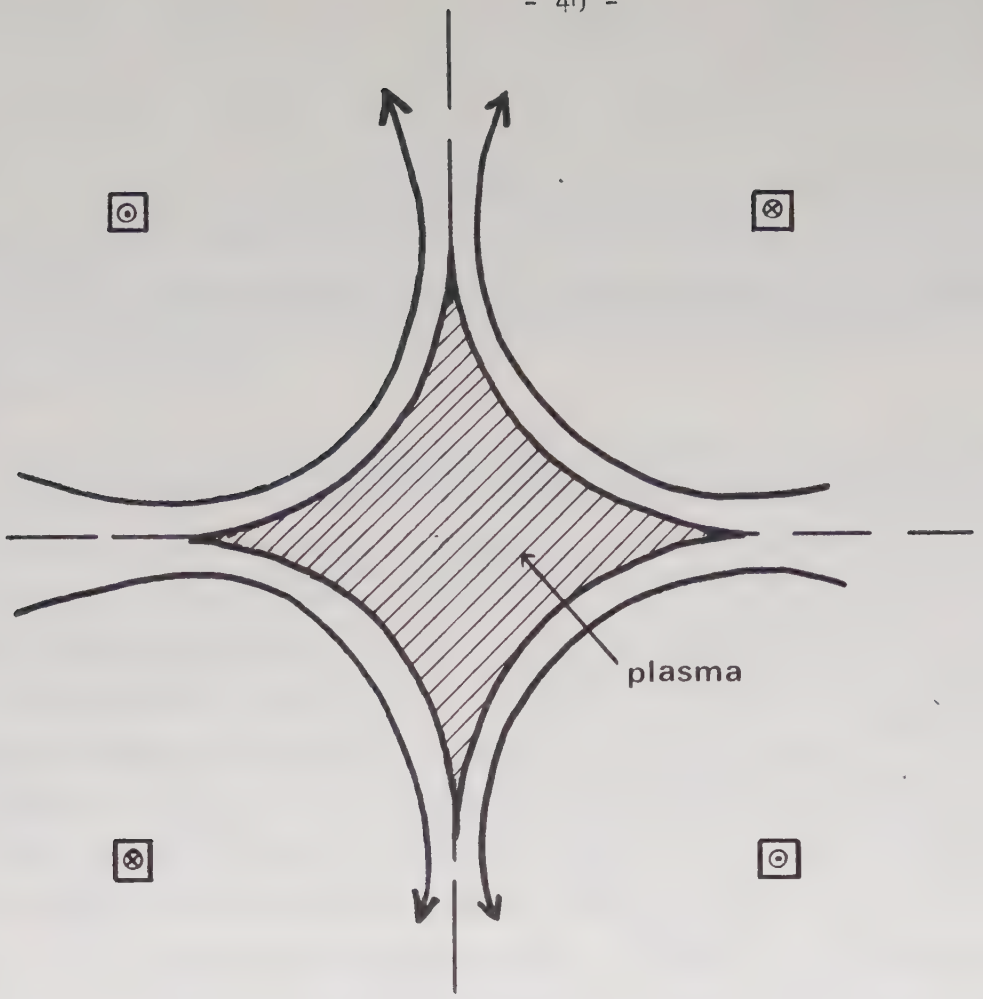


Figure IV.1 - Confinement d'un plasma dans un champ magnétique du type "cusp".

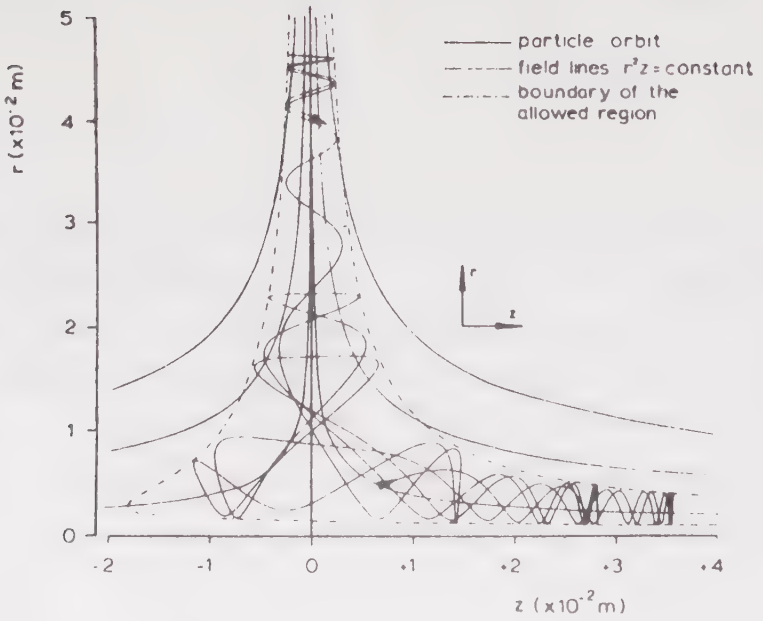


Figure IV.2 - Trajectoires de particules chargées dans un champ magnétique du type "cusp".

$$m \frac{dV_z}{dt} = - e (v_x B_y - v_y B_x).$$

avec $$B_x = - \frac{B_o \ell}{\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

et $$B_y = \frac{B_o \ell}{\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

cette équation peut s'écrire :

$$m \frac{dV_z}{dt} = - \frac{eB_o \ell}{\pi} \frac{d\lambda}{dt}$$

Par conséquent la quantité $P_z = m v_z + \frac{eB_o \ell}{\pi} \lambda$ est un invariant du mouvement.

Un autre invariant est l'énergie $H = \frac{1}{2} mv^2$.

3. DOMAINE ACCESSIBLE AUX ELECTRONS PRIMAIRES

Les invariants H et P_z peuvent s'écrire en fonction de la vitesse de l'électron dans la région de champ nul :

$$H = \frac{1}{2} m v_{po}^2$$

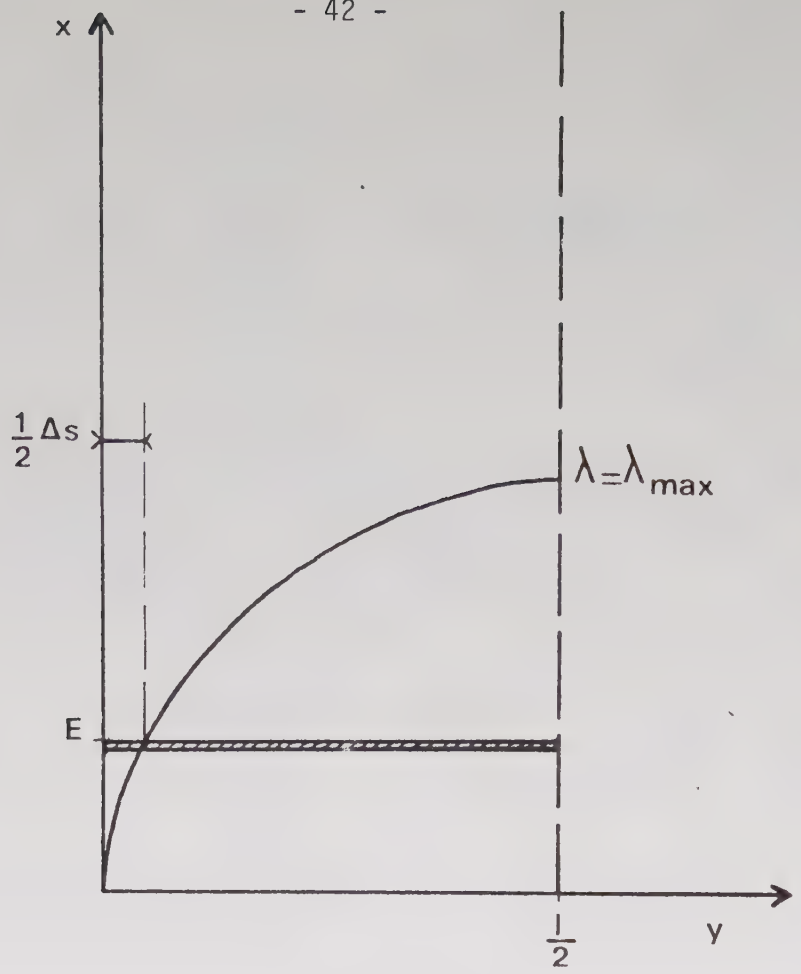
$$P_z = m v_{zo}$$

L'invariance de H s'écrit

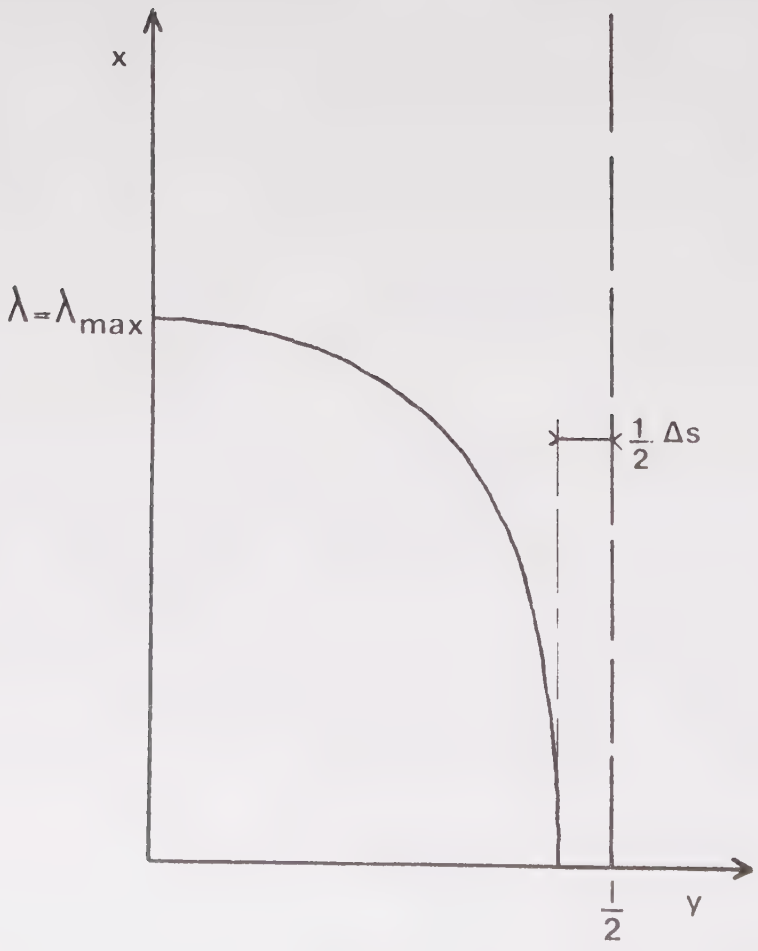
$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_{xo}^2 + v_{yo}^2 + v_{zo}^2 \qquad \text{(IV.2)}$$

et celle de P_z :

$$v_z = v_{zo} - \frac{e B_o \ell}{\pi m} \lambda \qquad \text{(IV.3)}$$



(a)



(b)

Figure IV.3 - Limite du domaine accessible aux électrons primaires ($\lambda = \lambda_{max}$) et largeur des trous de fuite (ΔS) dans la géométrie du multipole (a) et de la grille de courants (b).

En reportant (IV.3) dans (IV.2), on trouve que $v_x^2 + v_y^2$ n'est positif que si

$$(v_{zo} - \frac{e\, B_o \ell}{\pi m} \lambda)^2 < v_{po}^2$$

qui peut s'écrire $\lambda < \lambda_{max}$

avec $$\lambda_{max} = \frac{2\pi m\, v_{po}}{e B_o \ell}$$

La condition $\lambda < \lambda_{max}$ définit donc le domaine accessible aux électrons primaires.

λ_{max} peut aussi s'écrire : $\lambda_{max} = 2\pi \frac{r_p}{\ell}$, où r_p est le rayon de Larmor des électrons primaires.

4. LARGEUR DES TROUS DE FUITE DES ELECTRONS PRIMAIRES

4.1 - Cas de la géométrie multipolaire

La figure II.6 montre qu'il faut distinguer les cas $\lambda_{max} < 1$ et $\lambda_{max} > 1$. En effet si λ_{max} est supérieur à 1, les électrons primaires peuvent fuir entre les cusps ; leur confinement est minime. On se limitera donc au cas où λ_{max} est inférieur à 1, ce qui peut s'écrire $B_o > \frac{e}{2\pi m} \frac{\ell}{v_{po}}$.

La largeur ΔS des trous de fuite se calcule par l'intersection de la ligne de champ $\lambda = \lambda_{max}$ avec la coque (fig. 3a) d'équation $x = E$.

On arrive à :

$$\Delta S = 2\pi \frac{E^2}{\ell} \lambda_{max}$$

ou encore : $\Delta S = (2\pi \frac{E}{\ell})^2 r_p$

Le trou de fuite des électrons primaires est donc proportionnel à r_p.

4.2 - Cas de la grille de courant

La figure (II.9) montre que les pertes d'électrons primaires se font toujours dans les cusps, quelle que soit la valeur de λ_{max}. On peut calculer la longueur des trous de fuite par l'intersection de la ligne de champ $\lambda = \lambda_{max}$ avec le plan des fils (figure 3b). On arrive à

$$\Delta S = \frac{2\ell}{\pi} \lambda_{max}$$

c'est à dire $\Delta S = 4r_p$.

On retrouve donc exactement le résultat de Hershkowitz[7], qui trouvait expérimentalement une largeur à mi-hauteur des pics du flux d'électrons primaires transmis par une telle grille égale à r_p.

CHAPITRE V

DIFFUSION AMBIPOLAIRE EN CHAMP MAGNETIQUE

Dans ce chapitre nous allons étudier la diffusion ambipolaire d'un plasma à travers un champ magnétique de translation par rapport à un axe Oz et tel que le champ $\vec{B}$ soit en tout point perpendiculaire à cet axe Oz. Nous commencerons par calculer les coefficients de transport des électrons et des ions dans un tel champ magnétique. Nous verrons que le champ magnétique ne modifie pas la diffusion parallèlement aux lignes de champ, alors que perpendiculairement à ces lignes la diffusion des électrons est ralentie à tel point que les ions diffusent plus vite que les électrons, ceci dès que le module du champ B dépasse une certaine valeur B_c. Le champ électrique self consistent, qui a pour rôle d'accélérer l'espèce la plus lente et de freiner la plus rapide accélèrera donc les ions le long des lignes de champ ; perpendiculairement au champ magnétique, le champ électrique accélèrera les ions ou les électrons, selon que B est inférieur ou supérieur à la valeur critique B_c. Dans un champ multipolaire, où B croît de façon monotone quand on s'éloigne du centre du dispositif, le champ électrique perpendiculaire aux lignes de champ s'inversera donc le long de la ligne où $B = B_c$.

De façon générale, la ligne $B = B_c$ délimitera deux domaines de diffusion : dans la région où $B < B_c$, le champ magnétique affectera peu la diffusion du plasma ; au contraire dans la région $B > B_c$ la diffusion se fera presque exclusivement parallèlement aux lignes de champ.

1. EQUATIONS DE DIFFUSION EN REGIME STATIONNAIRE

1.1 - Equations macroscopiques

Considérons un gaz partiellement ionisé, constitué d'atomes neutres, d'électrons et d'atomes une fois ionisés ; on suppose que la quasi-neutralité est respectée en tout point. Soit n la densité électronique ou ionique. On introduit les vitesses macroscopiques électronique et ionique $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$, ainsi que les taux de création des électrons et des ions α_e et α_i, qui peuvent à priori différer. On suppose de plus que le plasma est en régime stationnaire.

Les équations de conservation des électrons et des ions s'écrivent :

$$\mathrm{div}(n\vec{v}_e) = \alpha_e \qquad (V.1)$$

$$\mathrm{div}(n\vec{v}_i) = \alpha_i \qquad (V.2)$$

Si $\vec{E}$ est le champ électrique (appliqué en self consistant) qui règne dans le plasma et $\vec{B}$ le champ magnétique appliqué, les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent[21] :

$$0 = -ne(\vec{v}_e \times \vec{B}) - n\, m_e \nu_{ei}(\vec{v}_e - \vec{v}_i) - n\, m_e \nu_{en} \vec{v}_e - \vec{\nabla}(nkT_e) - ne\vec{E} \qquad (V.3)$$

$$0 = ne(\vec{v}_i \times \vec{B}) + n\, m_i \nu_{ei}(\vec{v}_e - \vec{v}_i) - n\, m_i \nu_{in} \vec{v}_i - \vec{\nabla}(nkT_i) + ne\vec{E} \qquad (V.4)$$

où e est la charge élémentaire, T_e et T_i, m_e et m_i sont respectivement les températures et les masses électroniques et ioniques, ν_{ei}, ν_{en} et ν_{in} sont les fréquences des collisions électron-ion, électron-neutre et ion-neutre. On supposera dans toute la suite que les températures T_e et T_i sont uniformes.

Les quatre équations (V.1), (V.2), (V.3), (V.4) nous permettrons de déterminer les vitesses macroscopiques $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$, le profil de densité et le champ électrique $\vec{E}$, connaissant le champ magnétique $\vec{B}$, les températures T_e et T_i ainsi que les termes de création α_e et α_i.

1.2 - Validité des équations macroscopiques[28]

Les grandeurs macroscopiques qui interviennent dans les équations de transport ne sont définies qu'à la condition que les fonctions de distribution des vitesses aient la possibilité d'être toujours proches d'une maxwellienne : toutes les quantités moyennes du plasma doivent changer lentement dans l'espace et le temps. En effet, la fonction de distribution devient maxwellienne en un temps de l'ordre de grandeur du temps caractéristique des échanges de quantité de mouvement τ_c. Donc les grandeurs du plasma ne doivent pas changer de façon significative pendant ce temps τ_c, ou sur des distances

$$\ell = v\, \tau_c$$

de l'ordre de celle parcourue par les particules pendant τ_c (v désigne la vitesse des particules).

- La condition sur les variations temporelles s'écrit :

$$\frac{d}{dt} << \frac{1}{\tau_c}$$

- La condition sur les variations spatiales s'écrit, dans le cas le plus simple du champ magnétique nul ou faible :

$$L >> \ell$$

où L est la longueur caractéristique des variations des grandeurs dans le plasma : $|\overrightarrow{\nabla A}| = \frac{A}{L}$

Dans un champ magnétique fort, c'est à dire tel que

$$\omega_b \tau_c >> 1$$

où $\omega_b = \frac{eB}{m}$ est la fréquence gyromagnétique des particules de charge e et de masse m, la première condition reste valable mais la seconde est plus compliquée : le mouvement perpendiculairement aux lignes de champ est limité par le rayon de Larmor r des particules, qui est plus petit que la distance ℓ d'un facteur $\omega_b \tau_c$.

Dans un champ à peu près homogène, la condition sur les variations spatiales s'écrira si $L_\perp$ et $L_{/\!/}$ sont les longueurs de gradient perpendiculairement et parallèlement au champ :

$$L_\perp >> r$$

$$L_{/\!/} >> \ell$$

Dans les champs magnétiques très inhomogènes il faut tenir compte d'un phénomène de dérive perpendiculaire au champ mangétique $\vec{B}$ et au vecteur $\vec{\nabla} B^2$; cette dérive se fait à la vitesse $v_D = v\, r\, |\frac{\nabla_\perp B}{B}|$ qui peut aussi s'écrire $v_D = v \frac{r}{L}$. Pendant la durée τ_c, cette dérive provoque un déplacement $d = v_D \tau$ qui peut contribuer aux phénomènes de transport perpendiculaires au champ magnétique.

La condition

$$L_\perp >> r$$

doit donc être emplacée par

$$L_\perp >> d$$

qui s'écrit, en remplaçant d par sa valeur :

$$L_\perp >> (\ell r)^{1/2}$$

Tout ceci est valable à condition que les collisions elles-mêmes ne soient pas perturbées par le champ magnétique ; ceci est vérifié si le rayon de Larmor est beaucoup plus grand que la dimensions du domaine d'interaction coulombienne, c'est à dire la longueur de Debye : on peut alors assimiler les trajectoires de la particule à des morceaux de droite juste avant et juste après la collision. Cette condition s'écrit :

$$r >> \lambda_D$$

avec $r = \frac{mv}{eB}$

et $\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_o kT}{ne^2}\right)^{1/2}$

où T est la température des particules, reliée à v par

$$v^2 = \frac{kT}{m}$$

Cette condition s'écrit $\frac{B^2}{\mu_o} << n\, m\, c^2$

c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

Un autre facteur qui peut limiter la validité des équations macroscopiques est la présence d'instabilité dans le plasma. Une estimation simple de l'augmentation des phénomènes de transport due à la turbulence peut se faire ainsi :

Supposons que le plasma génère un champ électrique fluctuant d'amplitude de l'ordre de E', dont la longueur de corrélation est ℓ'. Ces champs provoquent des mouvements de dérive dans le champ magnétique avec une vitesse perpendiculaire aux champs électrique et magnétique, de module

$$v_D' = \frac{E'}{B}$$

v_D' change aléatoirement de direction chaque fois que la particule a parcouru une distance ℓ'.

Le coefficient de diffusion effectif dû à ce phénomène peut être estimé à

$$D_{turb} = \ell' \, v_D'$$

Si l'on suppose que l'énergie acquise par une particule lors d'une accélération dans le champ fluctuant est de l'ordre de l'énergie thermique :

$$e \, \ell \, E' \approx kT$$

D_{turb} peut s'écrire :

$$D_{turb} = \frac{kT}{eB}$$

Il faut comparer D_{turb} au coefficient classique de diffusion perpendiculaire, soit

$$D_\perp = \frac{r^2}{\tau_c}$$

Le rapport de ces deux coefficients s'écrit :

$$\frac{D_{turb}}{D_\perp} \approx \omega_b \, \tau_c$$

Donc, en principe, dès que $\omega_b \, \tau_c$ devient supérieur à 1, les phénomènes de transport perpendiculaires aux lignes de champ peuvent être sensiblement augmentés.

Vérifions que les différentes conditions de validité sont vérifiées dans notre modèle de décharge :

Dans le cas d'aimants ou de fils situés sur les génératrices d'un cylindre de révolution et si la distance entre deux aimants ou deux fils voisins est d'une dizaine de centimètres :

$$L_{\perp} \approx L_{/\!/} \approx 0{,}10 \text{ m}$$

Les collisions qui assurent la maxwellianisation des électrons et des ions sont respectivement :

- les collisions électron-électron, de fréquence $\nu_{ee} = 4.3 \times 10^{7} \text{ s}^{-1}$
- les collisions ion-ion, de fréquence $\nu_{ii} = 5 \times 10^{6} \text{ s}^{-1}$

- Les libres parcours moyens sont donc

- pour les électrons : $\ell_e \sim 1{,}5 \times 10^{-2}$ m
- pour les ions : $\ell_i \sim 0{,}2 \times 10^{-3}$ m

Les conditions $L_{/\!/} >> \ell_e$

$L_{/\!/} >> \ell_i$

sont donc bien vérifiées.

- Les rayons de Larmor des électrons et des ions sont, dans un champ magnétique d'environ 300 Gauss :

- $r_e = 9.10^{-5}$ m
- $r_i = 4.10^{-2}$ m

Par conséquent $(r_e \ell_e)^{1/2} \sim 1.10^{-3}$ m

$(r_i \ell_i)^{1/2} \sim 3.10^{-3}$ m

les conditions $L_{\perp} > (r_e \ell_e)^{1/2}$

et $L_{\perp} > (r_i \ell_i)^{1/2}$

sont donc bien vérifiées.

Comme dans tous les problèmes de théorie macroscopique en champ magnétique, on peut se heurter à d'apparents paradoxes entre les résultats obtenus par cette théorie et les résultats de la théorie du mouvement du centre-guide. Ces paradoxes ont été analysés par Spitzer[41], Braginskii[28] etc ... et leur réflexion se résume ainsi : on fait une erreur en confondant la vitesse macroscopique (qui est la moyenne des vitesses des particules contenues dans un élément de volume donné à un instant donné) avec la vitesse moyenne des centre-guides, qui fait apparaître les inhomogénéïtés du champ magnétique et qui est la moyenne des vitesses des particules dont le centre-guide est contenu dans l'élément de volume considéré à un instant donné. Spitzer montre que les vitesses de dérive du centre-guide dues aux inhomogénéïtés du champ magnétique ne produisent aucune vitesse macroscopique. Ceci peut s'exprimer en terme de fonction de distribution : le champ magnétique ne modifie pas une fonction de distribution maxwellienne f^o :
$(\vec{w} \times \vec{B}) . \frac{\partial f^o}{\partial \vec{w}} = 0$. Tous les effets du champ magnétique sont contenus dans le terme $(q\vec{v} \times \vec{B})$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

2. MOBILITES ET COEFFICIENTS DE DIFFUSION EN CHAMP MAGNETIQUE

2.1 - Définitions ; géométrie du problème

Soit un plasma magnétisé dans lequel règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un gradient de densité $\vec{\nabla n}$. Par définition des mobilités et des coefficients de diffusion[29], les flux électronique et ionique s'écrivent respectivement :

$$\vec{\Gamma}_e = - \bar{\bar{D}}_e \vec{\nabla n} - n \bar{\bar{\mu}}_e \vec{E} \qquad (V.5)$$

$$\vec{\Gamma}_i = - \bar{\bar{D}}_i \vec{\nabla n} + n \bar{\bar{\mu}}_i \vec{E} \qquad (V.6)$$

$\bar{\bar{D}}$ et $\bar{\bar{\mu}}$ sont des tenseurs ; leurs composantes se calculent en résolvant en $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$ le système d'équations (V.3) et (V.4) dans lesquelles on suppose que T_e et T_i sont uniformes. Ce système d'équation devient :

$$-kT_e \vec{\nabla n} - n e \vec{E} - n e(\vec{v_e} \times \vec{B}) - n m_e \nu_{en} \vec{v_e} - n m_e \nu_{ei}(\vec{v_e} - \vec{v_i}) = 0 \qquad (V.3')$$

$$-kT_i \vec{\nabla n} + n e \vec{E} + n e(\vec{v_i} \times \vec{B}) - n m_i \nu_{in} \vec{v_i} + n m_e \nu_{ei}(\vec{v_e} - \vec{v_i}) = 0 \qquad (V.4')$$

Le dernier terme dans chacune de ces équations rend compte des collisions coulombiennes. On verra que ces collisions couplent les mouvements des électrons et des ions.

Nous résoudrons le système constitué par les équations (V.3') et (V.4') dans le cas particulier où le champ magnétique $\vec{B}$ est en tout point parallèle au plan xOy et où le système est de translation par rapport à l'axe Oz. On choisira comme axes (figure 1) :

$\vec{e}_{/\!/}$, parallèle à $\vec{B}$

$\vec{e}_{\perp}$, perpendiculaire à $\vec{B}$ et à Oz

$\vec{e}_z$, parallèle à Oz

Tout vecteur $\vec{A}$ s'écrira : $\vec{A} = A_{/\!/}\vec{e}_{/\!/} + A_{\perp}\vec{e}_{\perp} + A_z\vec{e}_z$.

Dans les équations (V.3') et (V.4') les termes $\nabla_z n$ et E_z disparaitront.

L'importance relative des collisions sur les neutres et des collisions coulombiennes est traduite par les rapports des deux derniers termes des équations (V.3') et (V.4') :

$$\nu_e = \frac{\nu_{en}}{\nu_{ei}} \text{ pour les électrons}$$

$$\nu_i = \frac{m_i \nu_{in}}{m_e \nu_{ei}} \text{ pour les ions}$$

Nous commencerons par résoudre le système (V.3'), (V.4') en négligeant les collisions coulombiennes, puis nous en tiendrons compte.

2.2 - Résolution en négligeant les collisions coulombiennes

Les équations donnant $\vec{v_e}$ et $\vec{v_i}$ en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{\nabla n}$ sont découplées. On arrive à (Appendice 3) :

$$n\, v_{e//} = - D_{e//} \nabla_{//} n - n\, \mu_{e//} E_{//}$$

avec $$D_{e//} = \frac{kT_e}{m_e \nu_{en}}$$

$$\mu_{e//} = \frac{e}{m_e \nu_{en}}$$

$$n v_{e\perp} = - D_{e\perp} \nabla_\perp n - n\, \mu_{e\perp} E_\perp$$

avec $$D_{e\perp} = \frac{D_{e//}}{1 + \frac{\omega_{be}^2}{\nu_{en}^2}}$$

et $$\mu_{e\perp} = \frac{\mu_{e//}}{1 + \frac{\omega_{be}^2}{\nu_{en}^2}}$$

où ω_{be} est la fréquence cyclotronique électronique : $\omega_{be} = \frac{eB}{m_e}$

$$nv_{ez} = - D_{e\perp z} \nabla_\perp n - n\mu_{e\perp z} E_\perp$$

avec $$D_{e\perp z} = \frac{\omega_{be}}{\nu_{en}} D_{e\perp}$$

et $$\mu_{e\perp z} = \frac{\omega_{be}}{\nu_{en}} \mu_{e\perp}$$

Pour les ions les résultats sont analogues :

$$nv_{i/\!/} = - D_{i/\!/} \nabla_{/\!/} n + n\mu_{i/\!/} E_{/\!/} \text{ avec } D_{i/\!/} = \frac{kT_i}{m_i \nu_{in}} \text{ et } \mu_{i/\!/} = \frac{e}{m_i \nu_{in}}$$

$$nv_{i\perp} = - D_{i\perp} \nabla_\perp n + n\mu_{i\perp} E_\perp \text{ avec } D_{i\perp} = \frac{D_{i/\!/}}{1 + \frac{\omega_{bi}^2}{\nu_{in}^2}} \text{ et } \mu_{i\perp} = \frac{\mu_{i/\!/}}{1 + \frac{\omega_{bi}^2}{\nu_{in}^2}}$$

où $\omega_{bi} = \frac{eB}{m_i \nu_{in}}$ est la fréquence cyclotronique ionique.

$$nv_{iz} = - D_{i\perp z} \nabla_\perp n + n\mu_{i\perp z} E_\perp \text{ avec } D_{i\perp z} = - \frac{\omega_{bi}}{\nu_{in}} D_{i\perp} \text{ et } \mu_{i\perp z} = - \frac{\omega_{bi}}{\nu_{in}} \mu_{i\perp}$$

Ces expressions montrent que, en champ magnétique :

- les coefficients de diffusion et de mobilité parallèlement aux lignes de champ sont les mêmes qu'en champ magnétique nul ;
- par contre les coefficients de transport perpendiculairement aux lignes de champ $D_{e\perp}$ et $\mu_{e\perp}$ sont diminués d'un facteur

$$1 + \frac{\omega_{be}^2}{\nu_{en}^2} = 1 + \mu_{e/\!/}^2 B^2$$

- enfin, des gradients de densité et de potentiel contenus dans un plan perpendiculaire à Oz provoquent des vitesses de dérive des ions et des électrons parallèles à Oz.

L'existence de ces flux n'est possible que si l'on envisage la présence de sources d'électrons et d'ions à l'infini. Dans les dispositifs pratiques, les circuits magnétiques ne sont pas infinis mais fermés sur eux mêmes ; il en est de même de ces flux parallèles aux aimants ou aux fils.

Comparons les coefficients de transport relatifs aux électrons et aux ions :

- parallèlement aux lignes de champ, tout se passe comme en champ nul :

$$\frac{\mu_{i//}}{\mu_{e//}} = \frac{m_e}{m_i}\frac{\nu_{en}}{\nu_{in}} << 1$$

et $$\frac{D_{i//}}{D_{e//}} = \frac{m_e}{m_i}\frac{T_i \nu_{en}}{T_e \nu_{in}} << 1$$

les coefficients de transport des électrons sont beaucoup plus grands que ceux des ions ;

- perpendiculairement aux lignes de champ le résultat dépend du module du champ :

$$\frac{\mu_{i\perp}}{\mu_{e\perp}} = \frac{\mu_{i//}}{\mu_{e//}}\frac{1 + \mu_e^2 B^2}{1 + \mu_i^2 B^2}$$

Pour B^2 très grand, $\frac{\mu_{i\perp}}{\mu_{e\perp}}$ devient de l'ordre de $\frac{\mu_{e//}}{\mu_{i//}} >> 1$

$\mu_{i\perp}$ devient supérieur à $\mu_{e\perp}$ dès que $\mu_{i//}(1 + \mu_{e//}^2 B^2) > \mu_{e//}(1 + \mu_{i//}^2 B^2)$

ce qui peut s'écrire $\gamma B^2 > 1$

où l'on a posé $\gamma = \mu_{e//}\mu_{i//}$

De même $D_{i\perp}$ devient supérieur à $D_{e\perp}$ dès que

$$\gamma B^2 > \frac{T_e \mu_{e//} - T_i \mu_{i//}}{T_i \mu_{e//} - T_e \mu_{i//}} \approx \frac{T_e}{T_i}$$

Dans notre modèle de décharge, γB^2 devient supérieur à 1 pour des champs B de l'ordre de 1 Gauss (Appendice 0).

La grandeur réduite fondamentale est donc γB^2, qui peut s'écrire $(\frac{B}{B_c})^2$ avec $B_c = (\mu_{e//} \mu_{i//})^{-1/2}$

ou encore $(\frac{\omega_{be}}{\nu_{en}})(\frac{\omega_{bi}}{\nu_{in}})$

ou encore $(\frac{\lambda_e}{r_e})(\frac{\lambda_i}{r_i})$

où λ_e et λ_i, r_e et r_i sont les libres parcours moyens et les rayons de Larmor (dans un champ B) des électrons et des ions.

2.3 - Résolution en tenant compte des collisions coulombiennes

Le terme provenant des collisions coulombiennes :

$$- n m_e \nu_{ei} (\vec{v_e} - \vec{v_i})$$

introduit dans les équations de transport de la quantité de mouvement (V.3') et (V.4') un couplage entre les vitesses électronique et ionique.

Les calculs sont faits dans l'Appendice 3.

Nous retiendrons essentiellement les résultats suivants :

- Parallèlement aux lignes de champ les coefficients de transport sont les mêmes qu'en l'absence de champ magnétique : les coefficients électroniques sont beaucoup plus grands que les coefficients ioniques.

- Perpendiculairement aux lignes de champ : la mobilité ionique devient supérieure à la mobilité électronique dès que $\gamma B^2 = 1$ avec

maintenant $\gamma = \dfrac{e^2}{m_e m_i \nu_{in}(\nu_{en}+\nu_{ei})}$ (V.7)

et le coefficient de diffusion des ions devient supérieur à celui des électrons dès que $\gamma B^2 = \dfrac{T_e}{T_i}$

γB^2 peut s'écrire sous les formes :

$$\left(\frac{\omega_{be}}{\nu_{en}+\nu_{ei}}\right)\left(\frac{\omega_{bi}}{\nu_{in}}\right)$$

ou $$\left(\frac{\lambda'_e}{r_e}\right)\left(\frac{\lambda_i}{r_i}\right)$$

λ'_e étant le libre parcours moyen des électrons défini par

$$\lambda'_e = \frac{v_{the}}{\nu_{en}+\nu_{ei}}$$

(où v_{the} est la vitesse thermique des électrons).

Les résultats sont donc qualitativement les mêmes qu'en négligeant les collisions coulombiennes. Seule la fréquence de collision des électrons ν_{en} doit être remplacée dans γ par $\nu_{en}+\nu_{ei}$. Le fait que dans γ la fréquence ν_{in} intervienne non modifiée par les collisions coulombiennes se comprend facilement : les fréquences ν_{in} et ν_{ei} sont comparables mais les collisions des ions sur les électrons ne produisent qu'un transfert de quantité de mouvement m_e/m_i fois plus petit que les collisions ion-ion.

Dans le dispositif qui nous sert de modèle, on trouve que γB^2 est égal à 1 pour des champs magnétiques de 15 Gauss (Appendice 0). On peut remarquer que pour de tels champs les électrons sont magnétisés ($\omega_{be} > \nu_{en}$) alors que les ions ne le sont pas ($\omega_{bi} < \nu_{in}$), ce qui explique bien que les coefficients de transport des ions soient supérieurs à ceux des électrons perpendiculairement au champ magnétique.

3. DIFFUSION QUASI AMBIPOLAIRE

3.1 - Hypothèse

Dans les équations (V.5) et (V.6) donnant les flux d'électrons et d'ions, le champ électrique $\vec{E}$ et le gradient de densité ne sont pas indépendants. En effet, les coefficients de transport des deux espèces chargées étant différents, une espèce diffuse plus vite que l'autre, ce qui entraine l'apparition d'une charge d'espace et donc un champ électrostatique qui tend à freiner les particules qui diffusent le plus vite et à accélérer celles qui diffusent le plus lentement, de façon que les flux d'électrons et d'ions évacuent exactement la quantité d'électrons et d'ions créés en volume, c'est à dire vérifient les équations

$$\text{div } \vec{\Gamma}_e = \alpha_e$$

$$\text{div } \vec{\Gamma}_i = \alpha_i$$

Ces deux conditions déterminent les profils de densité et de potentiel.

Pour résoudre simplement le problème, on est amené à faire une hypothèse supplémentaire sur les flux, qui soit compatible avec les équations de conservation des particules. Cette hypothèse s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_e = \beta \vec{\Gamma}_i$$

avec $\beta = \dfrac{\alpha_e}{\alpha_i}$

Cette hypothèse est suggérée par le fait que $\text{div } \vec{\Gamma}_e = \beta \text{ div } \vec{\Gamma}_i$. D'autre part, si l'on s'intéresse à une décharge multipolaire, on peut calculer les flux $\vec{\Gamma}_e$ et $\vec{\Gamma}_i$ dans la région centrale non magnétisée : on trouve que dans cette région les flux sont colinéaires et vérifient $\vec{\Gamma}_e = \alpha_e/\alpha_i \, \vec{\Gamma}_i$ (voir Appendice 4).

On est donc amené à prolonger cette relation dans l'ensemble de la décharge.

Il est intéressant de préciser l'ordre de grandeur de β dans une décharge multipolaire : si N est le nombre moyen d'ions créés par un électron primaire, β peut s'écrire :

$$\beta = \frac{N+1}{N} .$$

Les expériences réalisées par Hershkowitz[7] donnent, à une pression de 8.10^{-4} Torr d'argon, $N \sim 0,7$, et donc $\beta \sim 2,5$. D'autres expérimentateurs avancent des valeurs de β de l'ordre de 4. En tout cas β est de l'ordre de quelques unités.

3.2 - Détermination des profils de densité et de potentiel

a) Equation de diffusion

L'équation $\vec{\Gamma}_e = \beta \vec{\Gamma}_i$ permet d'éliminer le champ électrique :

$$\vec{E}_{/\!/} = - \frac{D_{e/\!/} - \beta D_{i/\!/}}{\beta \mu_{i/\!/} + \mu_{e/\!/}} \frac{\overrightarrow{\nabla_{/\!/} n}}{n}$$

$$\vec{E}_{\perp} = - \frac{D_{e\perp} - \beta D_{i\perp}}{\beta \mu_{i\perp} + \mu_{e\perp}} \frac{\overrightarrow{\nabla_{\perp} n}}{n}$$

En injectant ce champ électrique dans l'expression de $\vec{\Gamma}_i$, on arrive à

$$\vec{\Gamma}_i = - (D_{/\!/} \overrightarrow{\nabla_{/\!/} n} + D_{\perp} \overrightarrow{\nabla_{\perp} n})$$

où $D_{/\!/}$ et $D_{\perp}$ sont définis par

$$D_{/\!/} = \frac{\mu_{e/\!/} D_{i/\!/} + \mu_{i/\!/} D_{e/\!/}}{\beta \mu_{i/\!/} + \mu_{e/\!/}}$$

et

$$D_{\perp} = \frac{\mu_{e\perp} D_{i\perp} + \mu_{i\perp} D_{e\perp}}{\beta \mu_{i\perp} + \mu_{e\perp}}$$

L'équation de conservation des ions div $\vec{\Gamma}_i = \alpha_i$ s'écrit :

$$\text{div}\,(D_{//}\vec{\nabla}_{//}n + D_{\perp}\vec{\nabla}_{\perp}n) + \alpha_i = 0$$

cette équation ne fait plus intervenir que les dérivées de la densité ; elle permet donc de déterminer le profil de densité.

b) Profil de potentiel

Le profil de densité étant connu, on calcule le potentiel par

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\phi$$

où $\vec{E}$ peut s'écrire (voir Appendice 3)

$$\vec{E} = -\frac{k}{e}\frac{1}{n}\left[T_D\vec{\nabla}_{//}n + \frac{1}{1+\gamma\, q\, B^2}\,(T_D' - \beta\gamma\, B^2 T_D'')\vec{\nabla}_{\perp}n\right]$$

Les expressions exactes de T_D, T_D' et T_D'' sont calculées dans l'Appendice 3. On trouve que $T_D \approx T_D' \approx T_e$

$$T_D'' \approx T_i$$

$q = \dfrac{\beta m_i \nu_{in} + m_e \nu_{en}}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}}$ est peu différent de β.

4. RESULTATS QUALITATIFS

4.1 - Inversion du champ électrique

Le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = -\frac{D_{e//} - \beta\, D_{i//}}{\mu_{e//} + \beta\, \mu_{i//}}\,\frac{\vec{\nabla}_{//}n}{n} - \frac{D_{e\perp} - \beta\, D_{i\perp}}{D_{e\perp} + \beta\, \mu_{i\perp}}\,\frac{\vec{\nabla}_{\perp}n}{n}$$

- On a vu que $D_{e//} >> D_{i//}$. Comme β est de l'ordre de quelques unités, $D_{e//} - \beta D_{i//}$ sera toujours positif, et le champ électrique parallèle aux lignes de champ sera toujours opposé au gradient de densité parallèle. En effet, parallèlement aux lignes de champ, les mouvements des particules chargées ne sont pas perturbées par ce champ, et les électrons diffusent plus vite que les ions. Donc le champ électrique, qui a pour rôle d'évacuer les ions, est dirigé en sens inverse du gradient de densité.

- Perpendiculairement aux lignes de champ, le sens de $\vec{E}$ dépend du module du champ magnétique : si $D_{e\perp} > \beta D_{i\perp}$ (ce qui est réalisé quand $\beta\gamma B^2 < \frac{T_e}{T_i}$), les électrons diffusent assez vite pour évacuer un courant β fois plus grand que celui transporté par les ions ; la situation est la même que parallèlement aux lignes de champ et le champ électrique $\vec{E}_\perp$ est opposé au gradient $\overrightarrow{\nabla_\perp n}$. En champ magnétique fort ($\beta\gamma B^2 > \frac{T_e}{T_i}$), les électrons ont besoin d'être accélérés par un champ électrique pour pouvoir évacuer un flux β fois plus grand que le flux d'ions. Le champ $\vec{E}_\perp$ devient de même sens que $\nabla_\perp \vec{n}$.

On retrouve ici les résultats observés expérimentalement par Hershkowitz[8], à savoir que le potentiel décroît de façon monotone du centre vers la paroi quand on suit une ligne qui va du centre du dispositif à un cusp, alors que le long d'une ligne qui va du centre à la paroi entre deux cusps (donc perpendiculairement aux lignes de champ), le potentiel passe par un maximum avant de décroître aux abords immédiats de la paroi.

4.2 - Domaines de diffusion. Epaisseur de gaine

Le flux ionique a pour expression :

$$\vec{\Gamma_i} = - (D_{//} \overrightarrow{\nabla_{//} n} + D_\perp \overrightarrow{\nabla_\perp n})$$

Les coefficients de diffusion $D_{//}$ et $D_\perp$ sont calculés dans l'Appendice 3 :

$$D_{//} = \frac{kT_e + kT_i}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}}$$

$$D_\perp = \frac{D_{//}}{1+q\gamma B^2}$$

avec $$\gamma = \frac{e^2}{m_e m_i \nu_{in}\left[\nu_{en} + \nu_{ei}\left(1 + \frac{m_e}{m_i}\frac{\nu_{en}}{\nu_{in}}\right)\right]}$$

et $$q = \frac{\beta\, m_i \nu_{in} + m_e \nu_{en}}{m_i \nu_{in} + \beta\, m_e \nu_{en}}$$

En remarquant que $\frac{m_e}{m_i}\frac{\nu_{en}}{\nu_{in}} \ll 1$ ces expressions se simplifient :

$$\gamma \approx \frac{e^2}{m_e m_i \nu_{in}(\nu_{en} + \nu_{ei})} \quad \text{et} \quad q \approx \beta.$$

On constate donc que le coefficient de diffusion perpendiculaire aux lignes de champ devient nettement inférieur au coefficient de diffusion parallèle au champ quand $\beta\gamma B^2 \gg 1$.

On peut donc définir grossièrement deux domaines dans le champ magnétique (voir figures 3a et 3b) :

- le domaine où $\beta\gamma B^2 < 1$ (dans ce cas $D_\perp \approx D_{/\!/}$: la diffusion se fait de façon isotrope), qui définit la région 1 ;

- le domaine où $\beta\gamma B^2 > 1$: dans ce cas $D_\perp \ll D_{/\!/}$: la diffusion perpendiculairement aux lignes de champ est très réduite : le plasma se trouvant dans cette région diffusera parallèlement aux lignes de champ uniquement.

Dans ce deuxième domaine on peut distinguer deux types de régions :

- les régions alimentées en plasma par diffusion parallèle aux lignes de champ (région 2) ;

- les régions isolées du corps du plasma (région 3).

On peut définir l'épaisseur de gaine magnétique comme la largeur du domaine où $\beta\gamma B^2 > 1$. Cette épaisseur vaut approximativement, dans le cas où $\beta\gamma B_0^2$ est lui-même grand devant 1 :

$$\varepsilon = \frac{\ell}{2\pi}\, \ell n\, 4\beta\gamma B_0^2 \quad (\ell \text{ étant la distance entre deux cusps})$$

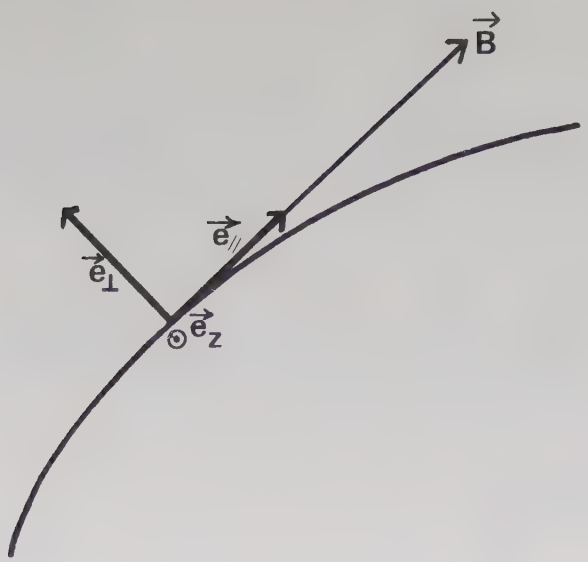


Figure V.1 - Vecteurs unitaires liés aux lignes de champ.

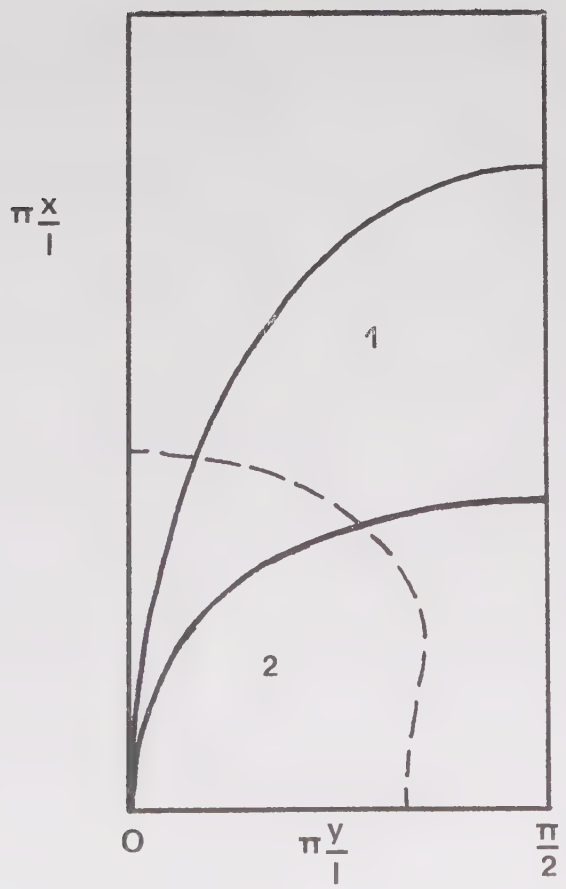


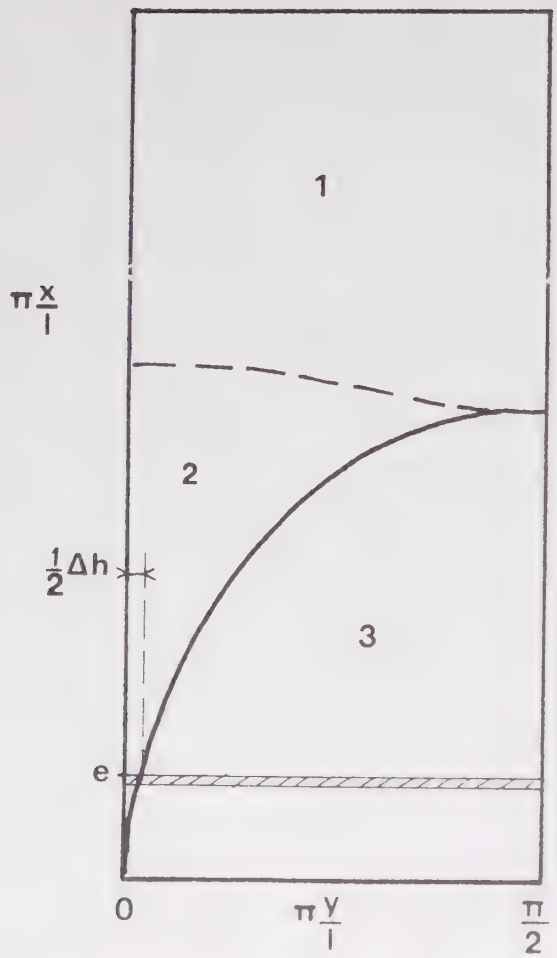
Figure V.2 - Domaines de diffusion dans le champ magnétique multipolaire, dans le cas où $\beta\gamma B_0^2 < 4$.

Figure V.3 - Domaines de diffusion dans la configuration multipolaire (a) et la configuration du type grille de courant (b).

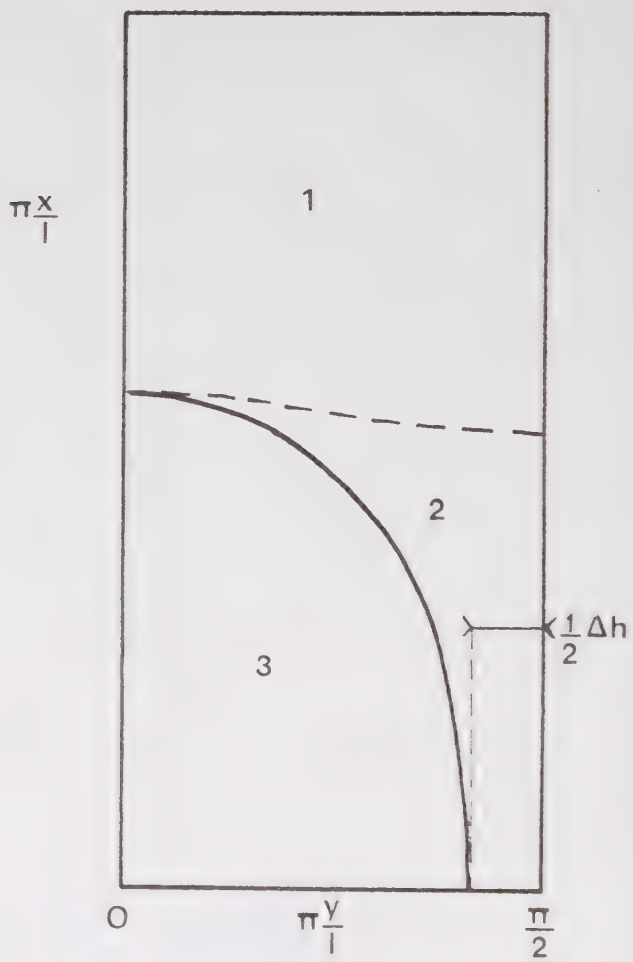
——— ligne de champ $\lambda = \lambda_0$

— — — — $\beta\gamma B^2 = 1$

▨ coque métallique



(a)



(b)

ε varie donc peu avec B_o ; c'est bien ce qu'avait remarqué Leung[7] en étudiant la diffusion d'un plasma à travers une grille de courants.

4.3 - Estimation de la largeur des trous de fuite du plasma

a) Cas de la géométrie multipolaire

Dans le cas du champ créé par des aimants, B passe par un maximum le long de la ligne $y = \pi/2$, égal à $\frac{B_o}{2}$.

Selon que $\beta\gamma \left(\frac{B_o}{2}\right)^2$ sera supérieur ou inférieur à 1 la situation sera différente :

- si $\beta\gamma B_o^2 < 4$: la région 3 n'existe pas et le plasma s'écoule jusqu'à la coque perpendiculairement aux lignes de champ dans la région 1 : le confinement est inexistant (cf. figure 2) ;

- si $\beta\gamma B_o^2 > 4$: le plasma n'atteint la coque qu'en diffusant parallèlement aux lignes de champ dans les cusps de la région 2 (fig. 3a). Nous allons estimer la largeur des trous de fuite dans le cas $\beta\gamma B_o^2 > 4$. Dans ce cas la région 3 est pratiquement vide de plasma. Les seules fuites ont lieu parallèlement aux lignes de champ définies par $\lambda < \lambda_o$, où $\lambda = \lambda_o$ est la ligne de champ tangente en $y = \frac{\pi}{2}$ (ou en $\mu = 0$) à la ligne $b^2 = 1/\beta\gamma B_o^2$ (cf. figure 3a). Le long de la ligne $\mu = 0$, $b = \lambda\sqrt{1-\lambda^2} = \lambda$ donc $\lambda_o^2 = 1/\beta\gamma B_o^2$.

Soit Δh la largeur du trou défini par l'intersection de la ligne $\lambda = \lambda_o$ avec le plan de la coque $x = e = \pi \frac{E}{\ell}$, où E est la distance entre la coque et les centres des aimants $y_o = \frac{\pi}{\ell}\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ est donné par :

$$\lambda_o = \frac{Che \sin y_o}{Ch^2 e - \cos^2 y_o}$$

comme e est très petit devant 1,

$$\lambda_o = \frac{\sin y_o}{e^2 + \sin^2 y_o}$$

ce qui donne $\sin y_o = \frac{1}{2\lambda_o}\left[1-(1-4\lambda_o^2 e^2)^{1/2}\right]$

on suppose $\beta\gamma B_o^2$ assez grand pour que $\lambda_o^2 e^2 = \frac{e^2}{\beta\gamma B_o^2} << 1$

on arrive alors à $\sin y_o \approx y_o \approx \lambda_o e^2$.

La largeur réelle des trous de fuite est donc

$$\Delta h = \frac{2\ell}{\pi} y_o$$

Tous calculs faits on arrive à $\Delta h = \frac{2\pi E^2}{\ell} \frac{1}{\sqrt{\gamma\beta}\, B_o}$

Δh est donc proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{\gamma B_o^2 \beta}}$, qui peut aussi s'écrire

$$\left(\frac{r_e r_i}{\beta \lambda_e \lambda_i}\right)^{1/2}$$

où r_e et r_i sont les rayons de Larmor des électrons et des ions dans un champ B_o, et λ_e et λ_i sont les libres parcours moyens de transfert de quantité de mouvement relatifs aux électrons et aux ions.

Par conséquent $\Delta h = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \frac{E^2}{\ell(\lambda_e \lambda_i)^{1/2}} (r_e r_i)^{1/2}$

On retrouve donc le résultat expérimental selon lequel les trous de fuite sont proportionnels au rayon gyromagnétique hybride.

b) Cas de la grille de courant

Dans cette configuration de champ, le plasma ne fuit jamais entre les cusps puisque le champ magnétique augmente à proximité des fils, on peut donc toujours définir les régions 1, 2 et 3 (figure 3b).

La largeur du trou de fuite est donnée par l'intersection avec le plan des fils de la ligne de champ $\lambda = \lambda_o$ tangente à la ligne $\beta\gamma B^2 = 1$ en $\varphi = 0$ (où $\mu = 0$).

Le calcul se fait de la même façon que dans le cas du multipole. On arrive à $\Delta h = \frac{2\ell}{\pi} \lambda_o$

avec $$\lambda_o = \frac{1}{(\beta\gamma B_o^2)^{1/2}}$$

puisque $$\frac{1}{(\beta\gamma B_o^2)^{1/2}} = \left(\frac{r_e r_i}{\beta \lambda_e \lambda_i}\right)^{1/2}$$

Δh peut se mettre sous la forme :

$$\Delta h = \frac{2}{\pi} \frac{\ell}{\sqrt{\beta}(\lambda_e \lambda_i)^{1/2}} (r_e r_i)^{1/2}$$

Là encore on retrouve bien les résultats expérimentaux de Leung et Hershkowitz[7] : les trous de fuite du plasma sont proportionnels au rayon de Larmor hybride $(r_e r_i)^{1/2}$.

CHAPITRE VI

RESOLUTION DE L'EQUATION DE DIFFUSION

L'équation de diffusion :

$$\operatorname{div} \vec{\Gamma}_i = \alpha_i$$

s'écrit : $$\operatorname{div} \left[D \left(\overrightarrow{\nabla_{/\!/} n} + \frac{1}{1 + \beta\gamma B^2} \overrightarrow{\nabla_{\perp} n} \right) \right] + \alpha = 0$$

avec $$D = D_{/\!/} = \frac{kT_e + kT_i}{\beta m_e \nu_{en} + m_i \nu_{in}} \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha_i$$

D est uniforme, donc l'équation de diffusion se met sous la forme :

$$\operatorname{div} \left[\overrightarrow{\nabla_{/\!/} n} + \frac{1}{1 + \beta\gamma B^2} \overrightarrow{\nabla_{\perp} n} \right] + \frac{\alpha}{D} = 0 \qquad \text{(VI.1)}$$

La valeur de γ, donnée par l'équation (V.7), montre que γ dépend de la densité n par l'intermédiaire de la fréquence des collisions coulombiennes ν_{ei}. Pour résoudre l'équation de diffusion (VI.1) nous négligerons cette dépendance, en utilisant la valeur de γ calculée à partir d'une densité moyenne présumée ; cette approximation rend l'équation (VI.1) linéaire.

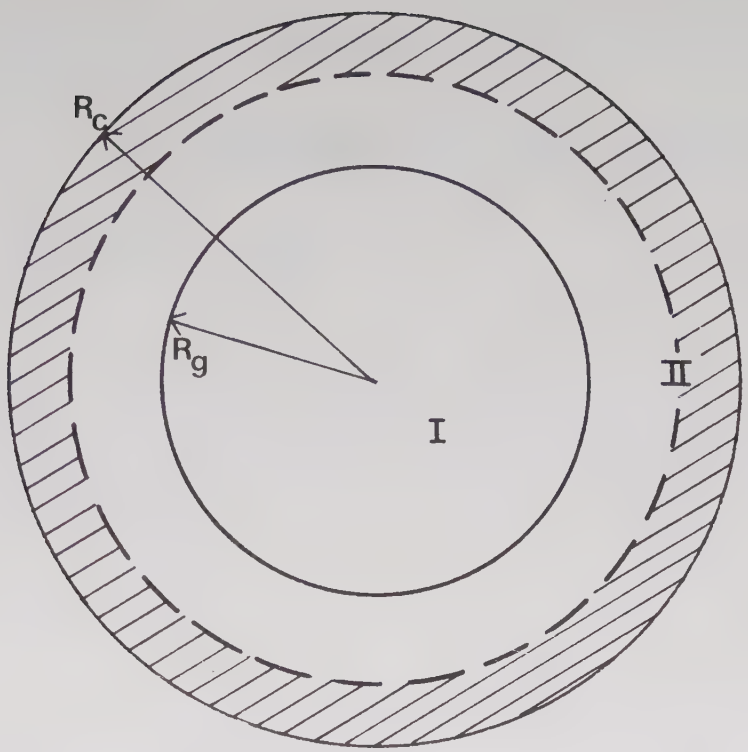
1. PRINCIPE DU CALCUL

1.1 - Conditions aux limites

Rappelons tout d'abord la solution en l'absence de champ magnétique : l'équation différentielle (VI.1) s'écrit simplement :

$$\nabla^2 n + \frac{\alpha^o}{D} = 0$$

où $\alpha^o = \nu_i^p \, n_p^o$, n_p^o désignant la densité d'électrons primaires en l'absence de



zone magnétisée ($\gamma B^2 > 1$)

$\gamma B^2 = 1$

Figure VI.1 - Définitions des régions I et II dans la décharge.

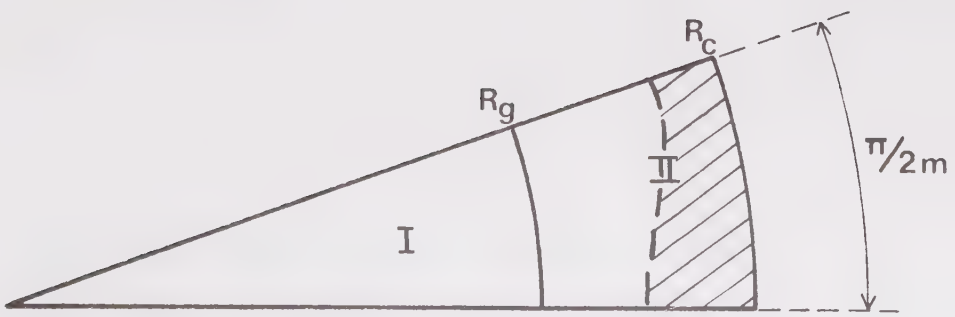


Figure VI.2 - Domaine d'intégration de l'équation de diffusion.

champ magnétique et ν_i^p la fréquence des collisions ionisantes des primaires sur les atomes neutres.

En géométrie cylindrique la densité est de la forme :

$$n^o(r) = n^o(0) - \frac{\alpha^o}{4D} r^2$$

où l'indice ^{o} rappelle que le champ magnétique est nul. La constante d'intégration $n^o(0)$, égale à la densité au centre, est donnée par la condition $n^o = 0$ sur la coque métallique située en $r = R_c$. Ceci donne :

$$n^o(0) = \frac{\alpha^o R_c^2}{4\,D}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un champ magnétique de type multicusp, donc confiné aux abords de la paroi. On peut définir deux régions dans la décharge (voir figure 1) :

- dans la région centrale I, le champ magnétique est nul, et le profil de densité est de la forme :

$$n(r) = n(o) - \frac{\alpha\, r^2}{4\,D} \quad \text{avec} \quad \alpha = \nu_i^p\, n_p$$

- dans la région II, on cherchera à résoudre numériquement l'équation différentielle (VI.1), en imposant à la solution les conditions aux limites :

. $n(R_c) = 0$ la densité est nulle sur la coque métallique

. $n(r)$ se raccorde avec la solution analytique en $r = R_g$.

La limite entre les régions I et II est fixée arbitrairement en $r = R_g$; il faut seulement que cette frontière soit contenue dans la région de champ négligeable.

1.2 - Raccordement des solutions dans les régions I et II

En $r = R_g$, il faut raccorder la solution numérique calculée dans la région II avec la solution analytique

$n(r) = n(o) - \frac{\alpha}{4D} r^2$, valable dans la région I

La densité au centre n(o) n'est pas connue à priori ; on ne peut donc qu'imposer une condition sur la pente en R_g :

$(\frac{dn}{dr})_{R_g} = - \frac{\alpha R_g}{2D}$, où $(\frac{dn}{dr})_{R_g}$ est la pente que l'on impose à la densité dans la région II.

Dans la région II, n(r) est donc solution de l'équation (VI.1), avec comme conditions aux limites :

$$n(R_c) = 0$$

$$(\frac{dn}{dr})_{R_g} = - \frac{\alpha R_g}{2D}$$

La densité au centre sera donnée par

$$n(o) = n(R_g) + \frac{\alpha R_g^2}{4 D}$$

La condition sur la pente en $r = R_g$ peut être imposée de deux façons différentes, selon la valeur de α dans la région II :

a) $\alpha = 0$ dans la région II

L'équation différentielle (VI.1) est homogène. On peut donc calculer la densité réduite $F(r) = \frac{n(r)}{n(R_g)}$, solution de (VI.1) avec comme conditions aux limites $\begin{cases} F(R_c) = 0 \\ F(R_g) = 1 \end{cases}$

La constante de normalisation $n(R_g)$ sera donnée par la condition sur la pente :

$$(\frac{dn}{dr})_{R_g} = n(R_g) \cdot (\frac{dF}{dr})_{R_g} = - \frac{\alpha R_g}{2 D}$$

où $(\frac{dF}{dr})_{R_g}$ est donnée par le calcul numérique

si l'on pose $\left(\frac{dF}{dr}\right)_{R_g} = -P$: $\quad n(R_g) = \frac{\alpha R_g}{2D P}$

La densité au centre est alors donnée par

$$n(0) = n(R_g) + \frac{\alpha}{4D} R_g^2 = \frac{\alpha R_g}{2 D} \left(\frac{1}{P} + \frac{R_g}{2}\right)$$

Ce modèle peut sembler mal approprié à la description d'une décharge, du fait de la discontinuité de α au passage de la frontière - fixée arbitrairement en $r = R_g$ - entre les domaines I et II.

Cependant ce modèle permet de décrire la diffusion à travers la gaine magnétisée, d'un plasma créé (ou injecté) dans la région I, et de densité réduite égale à 1 en $r = R_g$.

La valeur de $P = \left|\frac{dF}{dr}\right|_{R_g}$ traduira la variation relative de la densité à l'entrée de la région II : la longueur de gradient sera 1/P.

b) α uniforme dans toute la région accessible aux primaires

Ce modèle décrira plus spécifiquement l'évolution du profil de densité dans une décharge multipolaire.

L'équation différentielle (VI.1) sera résolue avec comme conditions aux limites : $n(R_c) = 0$

$$\left(\frac{dn}{dr}\right)_{R_g} = - \frac{\alpha R_g}{2 D}$$

Il faut remarquer que la position de la limite entre les régions I et II n'a pas d'importance dans ce modèle puisque le facteur d'ionisation α est continu au passage de cette limite.

Le calcul donnera directement le profil de densité dans la région II.

La densité au centre sera $n(0) = n(R_g) + \frac{\alpha R_g^2}{4 D}$, $n(R_g)$ étant fournie par le calcul.

L'augmentation de densité du plasma sera caractérisée par la quantité $\frac{n(o)}{n^o(o)}$ où $n^o(o)$ est la densité au centre que l'on obtiendrait sans champ magnétique, pour le même courant de décharge

$$\frac{n(o)}{n^o(o)} = \frac{4\ D}{\alpha^o R_c^2}\ n(o)\ ,\ \text{qui peut aussi s'écrire :}$$

$$\frac{4\ D}{\alpha\ R_c^2}\ n(o)\ x\ \frac{\alpha}{\alpha^o} = d\ x\ \frac{\alpha}{\alpha^o}$$

d représente l'augmentation relative de densité due au confinement des ions et des électrons du plasma.

$\frac{\alpha}{\alpha^o}$ représente l'augmentation de densité due au confinement des électrons primaires.

Le calcul numérique fournira n(o), pour un facteur d'ionisation $\alpha/4D$ donné ; on pourra donc calculer

$$d = \frac{4\ D}{\alpha\ R_c^2}\ n(o) \qquad \text{(VI.2)}$$

rapport de la densité au centre avec champ magnétique sur la densité au centre que l'on obtiendrait sans champ magnétique avec la même efficacité des primaires.

1.3 - Domaine d'intégration

Nous avons vu au paragraphe II.2 que les symétries du champ magnétique sont telles que l'on peut limiter son étude au domaine

$$0 < \varphi < \pi/2\ m$$

Ces symétries du champ entrainent des symétries pour la densité et le potentiel : ces grandeurs sont symétriques par rapport aux rayons $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$ m. Il suffira donc de résoudre l'équation de diffusion dans le domaine

$$0 < \varphi < \pi/2\ m \qquad \text{(fig. 2)}$$

en rajoutant les conditions aux limites

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\pi/2m} = 0$$

2. RESOLUTION NUMERIQUE

2.1 - Expression de l'équation de diffusion dans un système de coordonnées liées au champ

L'équation de diffusion (VI.1) s'écrit, en posant $g = \beta\gamma$

$$\operatorname{div}\left[\overrightarrow{\nabla_{/\!/} n} + \frac{1}{1+gB^2}\overrightarrow{\nabla_{\perp} n}\right] + \frac{\alpha}{D} = 0$$

En utilisant les variables réduites $X = m\,\frac{x}{R_o}$

$$Y = m\varphi$$

Si l'on note $\vec{\nabla}\underset{\sim}{n}$ le vecteur de composantes $\frac{\partial n}{\partial X}$ et $\frac{\partial n}{\partial Y}$

(VI.1) devient :

$$\operatorname{div}\left[\overrightarrow{\nabla_{\sim/\!/} n} + \frac{1}{1+gB_o^2 b^2}\overrightarrow{\nabla_{\sim\perp} n}\right] + \frac{\alpha\, R_o^2}{D\, m^2} = 0$$

$\overrightarrow{\nabla_{\sim/\!/} n}$ et $\overrightarrow{\nabla_{\sim\perp} n}$ prennent une forme particulièrement simple en coordonnées λ,μ (on rappelle que les lignes $\lambda(X,Y)$ = cste et $\mu(X,Y)$ = cste sont respectivement les lignes de champ et leurs trajectoires orthogonales).

En effet les composantes de $\vec{\nabla}\underset{\sim}{n}$ peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial X} = \dfrac{\partial n}{\partial \mu}\cdot\dfrac{\partial \mu}{\partial X} + \dfrac{\partial n}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial X} \\ \dfrac{\partial n}{\partial Y} = \dfrac{\partial n}{\partial \mu}\cdot\dfrac{\partial \mu}{\partial Y} + \dfrac{\partial n}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial Y} \end{cases}$$

avec $\frac{\partial \lambda}{\partial Y} = - \frac{\partial \mu}{\partial X} = b_X$

et $\frac{\partial \lambda}{\partial X} = \frac{\partial \mu}{\partial Y} = - b_Y$

on arrive à $\underset{\sim}{\nabla} \vec{n} = - b \frac{\partial n}{\partial \mu} \vec{e}_{//} + b \frac{\partial n}{\partial \lambda} \vec{e}_{\perp}$

où $\vec{e}_{//} = \frac{\vec{b}}{b}$ est le vecteur unitaire porté par la ligne de champ

et $\vec{e}_{\perp} = \vec{e}_z \times \vec{e}_{//}$

Par conséquent $\underset{\sim}{\nabla}_{//} \vec{n} = - b \frac{\partial n}{\partial \mu} \vec{e}_{//}$

et $\underset{\sim}{\nabla}_{\perp} \vec{n} = b \frac{\partial n}{\partial \lambda} \vec{e}_{\perp}$

On a de plus les relations

$$\text{div} \left[f(\lambda,\mu) \vec{e}_{//} \right] = b^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left(- \frac{1}{b} f(\lambda,\mu) \right)$$

$$\text{div} \left[f(\lambda,\mu) \vec{e}_{\perp} \right] = b^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{b} f(\lambda,\mu) \right)$$

qui permettent d'écrire l'équation de diffusion sous la forme :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \mu^2} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{1+Gb^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right] + \frac{A}{b^2} = 0 \qquad \text{(VI.1')}$$

où l'on a posé $G = g B_o^2$

et $A = \frac{\alpha R_o^2}{D m^2}$

2.2 - Domaine d'intégration dans le plan λ,μ

Il faut trouver le domaine du plan λ,μ qui correspond au domaine :

$$R_g < r < R_c$$

$$0 < \varphi < \pi/2m$$

La condition sur φ s'écrit simplement $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ (le lecteur se reportera aux cartes des lignes de champ des géométries du type multipole et picket-fence).

L'arc de cercle $r = R_c$ $(0 < \varphi < \pi/2m)$ est représenté dans le plan (λ,μ) dans le cas du multipole (fig. 3) et dans le cas de la grille de courant (fig. 4). On a pris $R_c = 0{,}984\ R_o$ où R_o est le rayon du cylindre passant par les axes des aimants ou les fils. Ces courbes représentent la "coque" qui limite le plasma.

Le cercle de rayon R_g a pour équation (cf. Appendices 1 et 2):

$$\lambda^2 + \mu^2 = H^2$$

avec $H = 1/\mathrm{Chmz}_g$, où l'on a posé $z_g = \ln (R_o/R_g)$

Pour donner un ordre de grandeur, si l'on considère qu'en $R_g = 0{,}85\ R_o$ le champ magnétique est pratiquement nul, ce qui est légitime puisque b est de l'ordre de $\frac{R_o}{R_g}\frac{1}{\mathrm{Chmz}_g} \approx 0.02$,

la valeur de H correspondante est de 0.02 environ.

Le domaine d'intégration est donc la région comprise entre le cercle de rayon H et la coque qui représente l'arc de cercle $r = R_c$.

2.3 - Méthode de résolution numérique

L'équation différentielle (VI.1') se résoud par une méthode de différences finies, où les dérivées premières et secondes de la densité en un point s'expriment en fonction des valeurs de la densité aux points voisins. Il faut donc réaliser un quadrillage du domaine d'intégration dans le plan λ, μ. Comme H est très petit devant les valeurs maximales de λ et μ, on choisit H comme pas d'intégration. Inversement, comme le choix de R_g est arbitraire, on

Figure VI.3 - Limite du domaine d'intégration dans le plan (λ,μ) dans le cas du champ multipolaire.

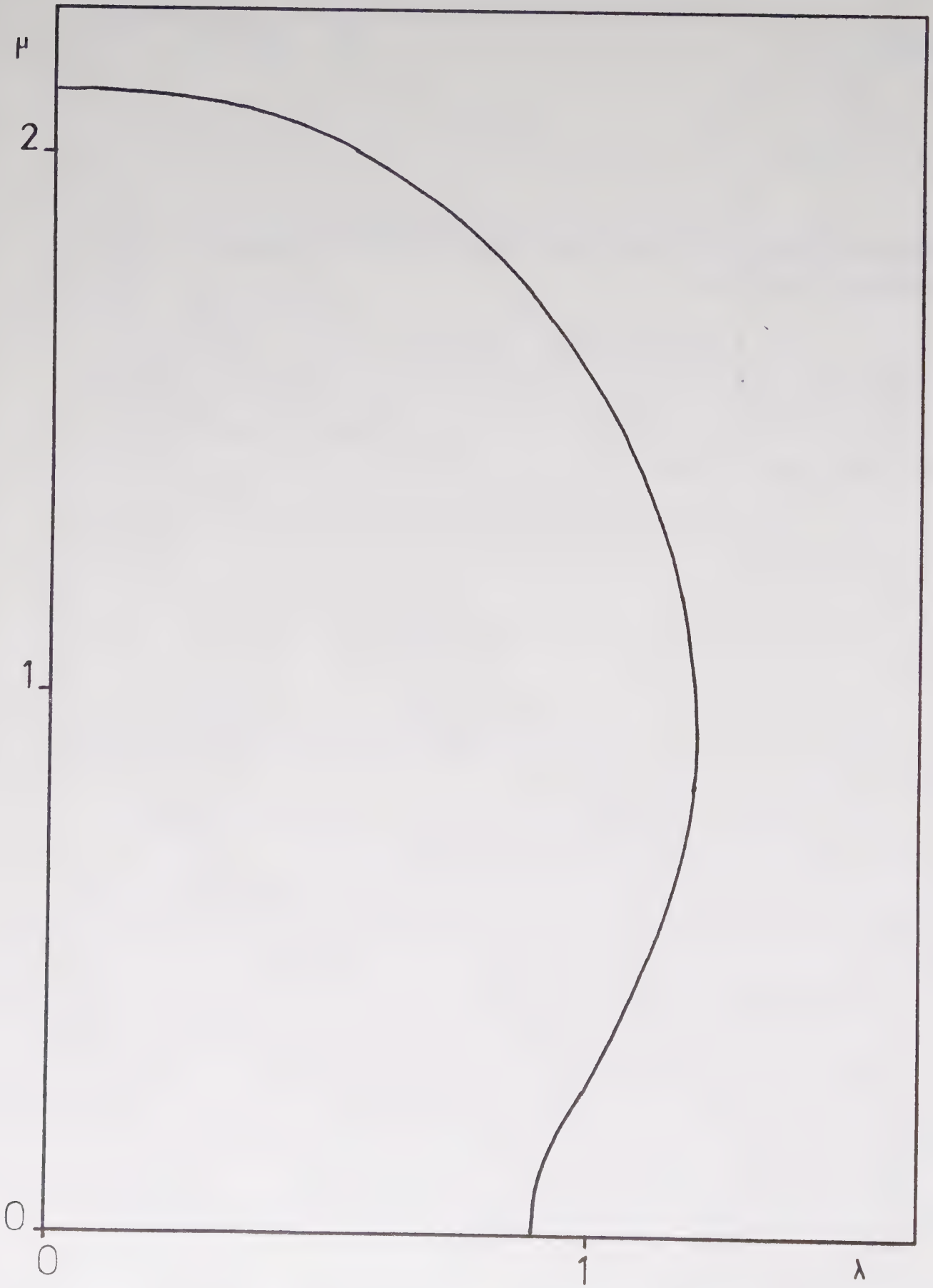
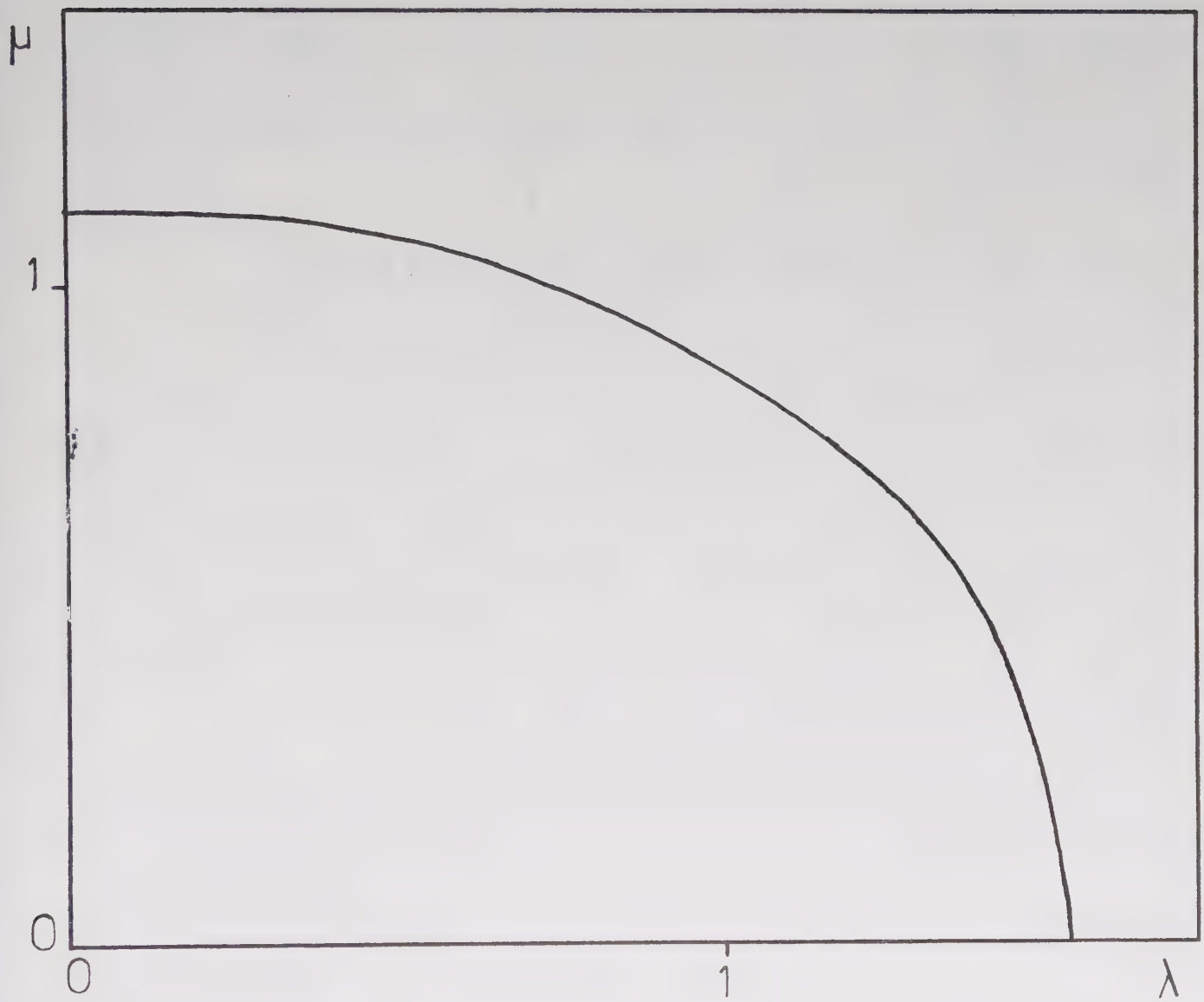


Figure VI.4 - Limite du domaine d'intégration dans le plan (λ,μ) dans le cas de la grille de courant.



peut se fixer un pas d'intégration H, et les points de raccord avec la solution analytique seront les points $r = R_o e^{-z_g}$, avec $Chmz_g = \frac{1}{H}$. Il faudra seulement vérifier que le champ magnétique est pratiquement nul en ces points.

On peut se demander pourquoi on ne continue pas le calcul numérique jusqu'au centre de la décharge (c'est à dire jusqu'au point $\lambda = \mu = 0$). La réponse est que plus on s'éloigne de la paroi moins les coordonnées λ et μ varient dans l'espace : dans le domaine assez vaste où le champ magnétique est nul, λ et μ restent peu différents de zéro et donc l'usage de ces coordonnées est mal adapté à la résolution numérique. Pour décrire finement les variations de la densité au voisinage du centre de la décharge, il faudrait un pas ridiculement petit, ce qui est d'autant moins avantageux que l'on connait la solution dans ce domaine.

2.4 - Traduction des conditions aux limites dans le plan λ,μ

- Les conditions $\left(\frac{\partial n}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = 0$

et $\left(\frac{\partial n}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\pi/2m}$

s'écrivent simplement :

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0 \qquad \text{et} \quad \left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = 0$$

- La condition $n(R_c) = 0$ s'écrira :

$n(\lambda,\mu) = 0$ sur la coque.

- La condition de raccord avec la solution analytique s'écrira aux deux points du quadrillage qui coïncident avec le cercle de rayon H, soit aux points (H,0) et (0,H) du plan λ,μ.

a) dans l'hypothèse $\alpha = 0$ dans la région magnétisée la condition que l'on impose à la densité réduite s'écrira :

$F(H,0) = 1$

et $F(0,H) = 1$

b) dans l'hypothèse $\alpha \neq 0$ dans la région magnétisée, la condition de raccordement est imposée à la pente :

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right)_{\substack{\lambda=H \\ \mu=0}} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\frac{1}{4}\frac{\alpha r^2}{D}\right)_{r=R_g}$$

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=H}} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\frac{1}{4}\frac{\alpha r^2}{D}\right)_{r=R_g}$$

(On rappelle que $\rho^2 = \frac{r^2}{R_o^2}$ s'exprime en fonction de λ et μ ; les expressions de ρ^2 en fonction de λ et μ sont données dans les Appendices 1 et 2).

2.5 - Contrôle de la précision

La principale source d'erreur systématique du calcul numérique est l'approximation de la coque par des points du quadrillage. Pour chiffrer cette erreur, nous avons effectué le calcul en prenant un champ magnétique nul (G = 0). Dans le cas du multipole comme dans le cas des fils de courants , on trouve que la quantité d, définie par l'équation (V.2), et qui devrait, idéalement, être égale à 1 en champ magnétique nul, est égale à 0.97.

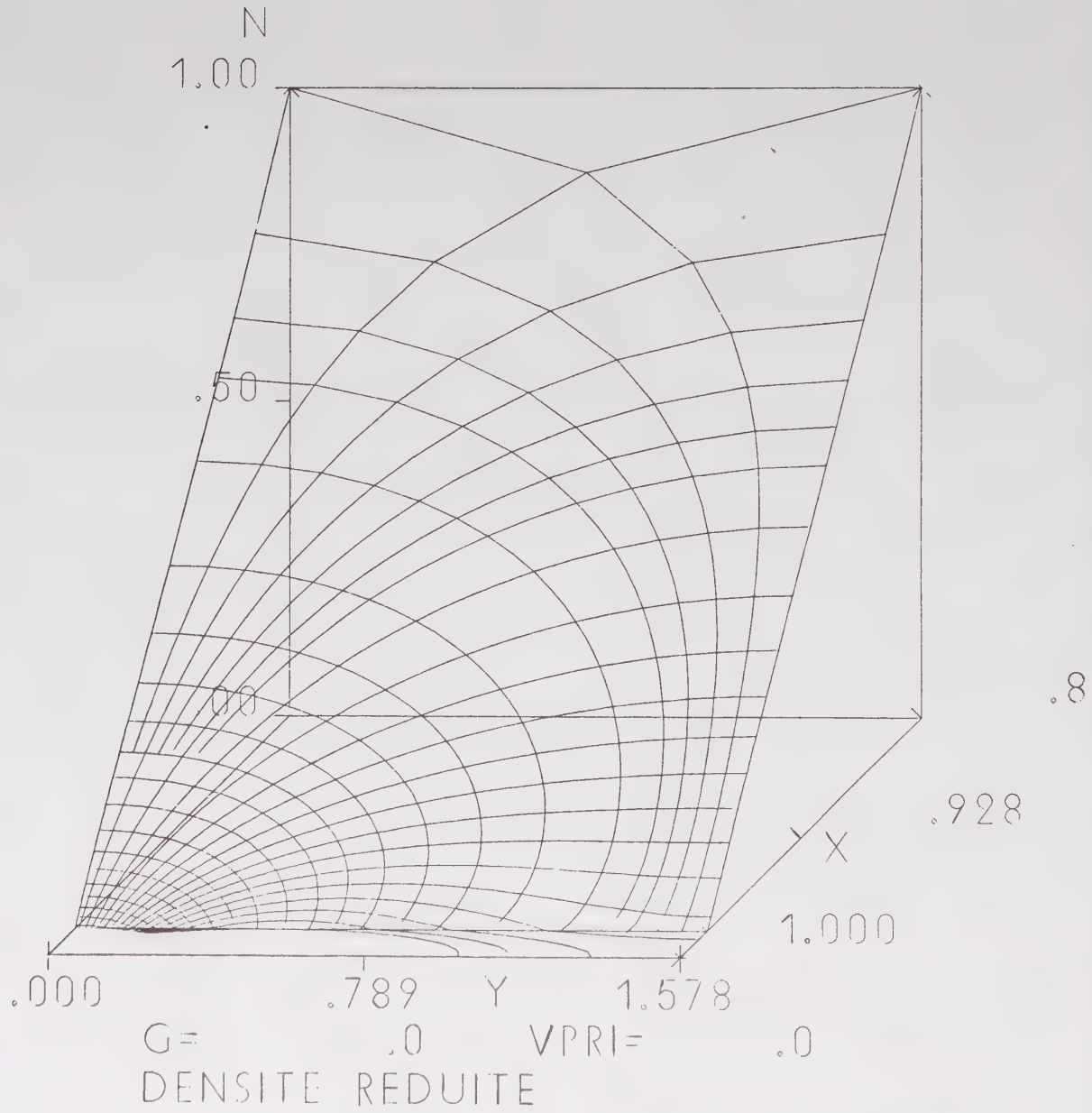
On peut donc chiffrer l'erreur due à l'approximation de la coque à 3 % environ.

Le lecteur trouvera le programme de calcul dans l'Appendice 5.

3. RESULTATS DES CALCULS NUMERIQUES

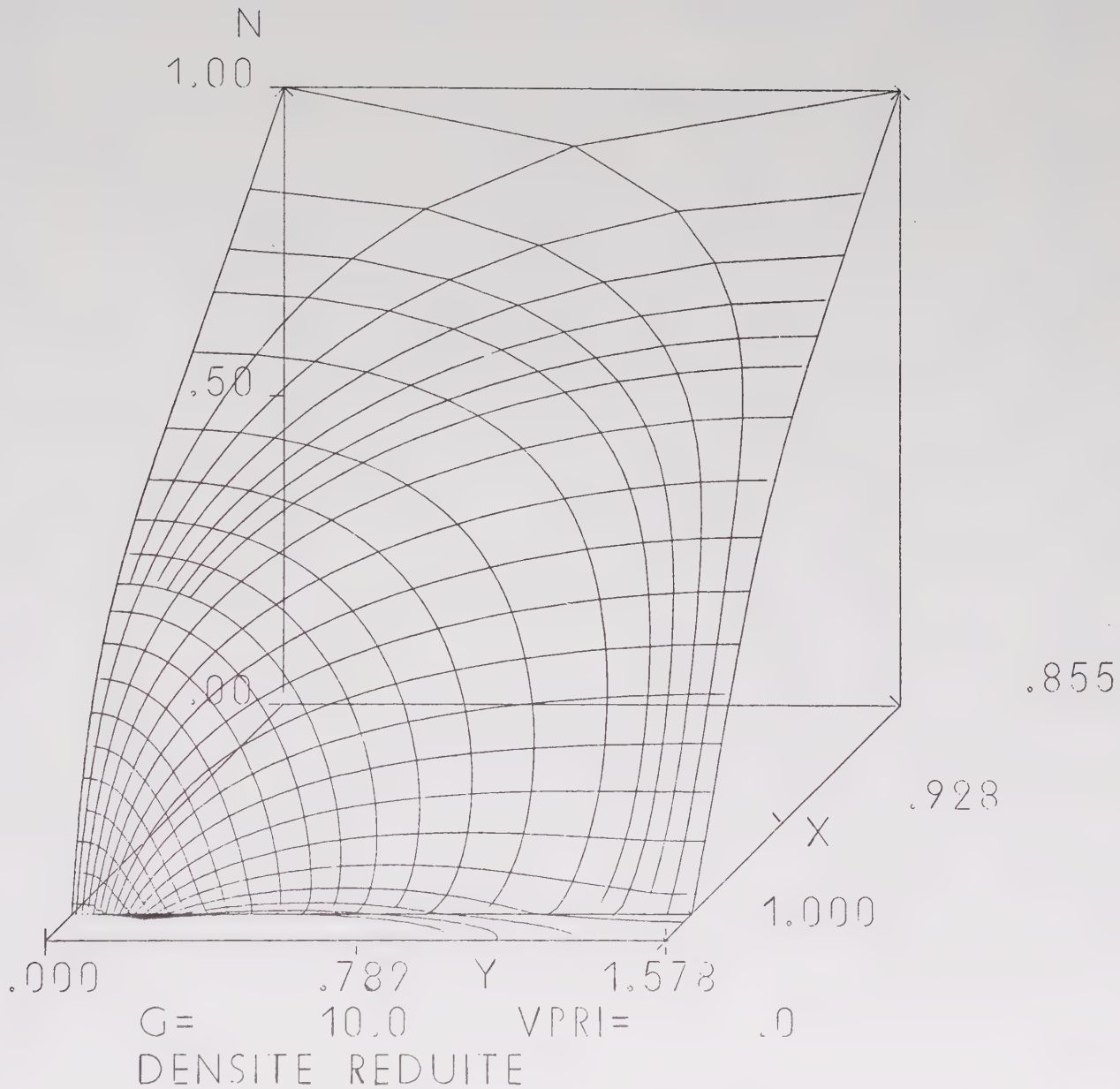
3.1 - Modèle sans ionisation

On rappelle que ce modèle décrit la diffusion d'un plasma de densité choisie arbitrairement égale à 1 à travers le champ magnétique multipolaire. Les profils de densité dans le domaine $R_g < r < R_c$ sont représentés par les figures 5 à 7, pour les valeurs G = 0, G = 10 et G = 50. On a représenté les variations de la densité le long des rayons $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2m$, c'est à dire respectivement vers un aimant et entre deux aimants (figures 8 et 9), pour ces mêmes valeurs de G. La densité commence par décroître d'autant moins vite que G est plus grand, pour chuter abruptement à proximité de la paroi (figure 8). On peut aussi apprécier le fait que le profil de densité s'aplatit en examinant



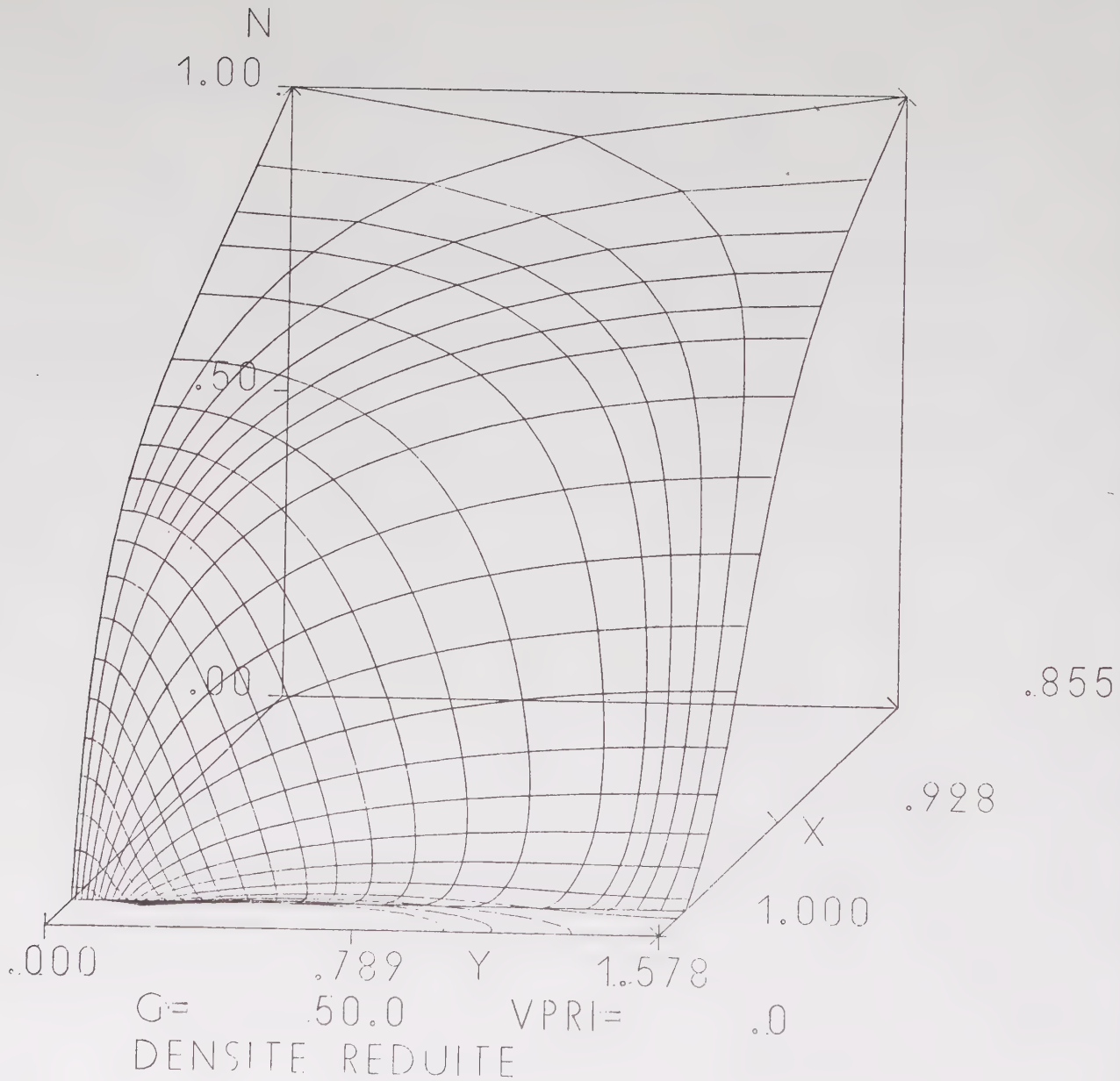
Modèle sans ionisation (multipole)

Figure VI.5



Modèle sans ionisation (multipole)

Figure VI.6



Modèle sans ionisation (multipole)

Figure VI.7

Figure VI.8 - Profil de densité vers un aimant (rayon $\varphi = 0$) dans le modèle sans ionisation, pour différentes valeurs de G.

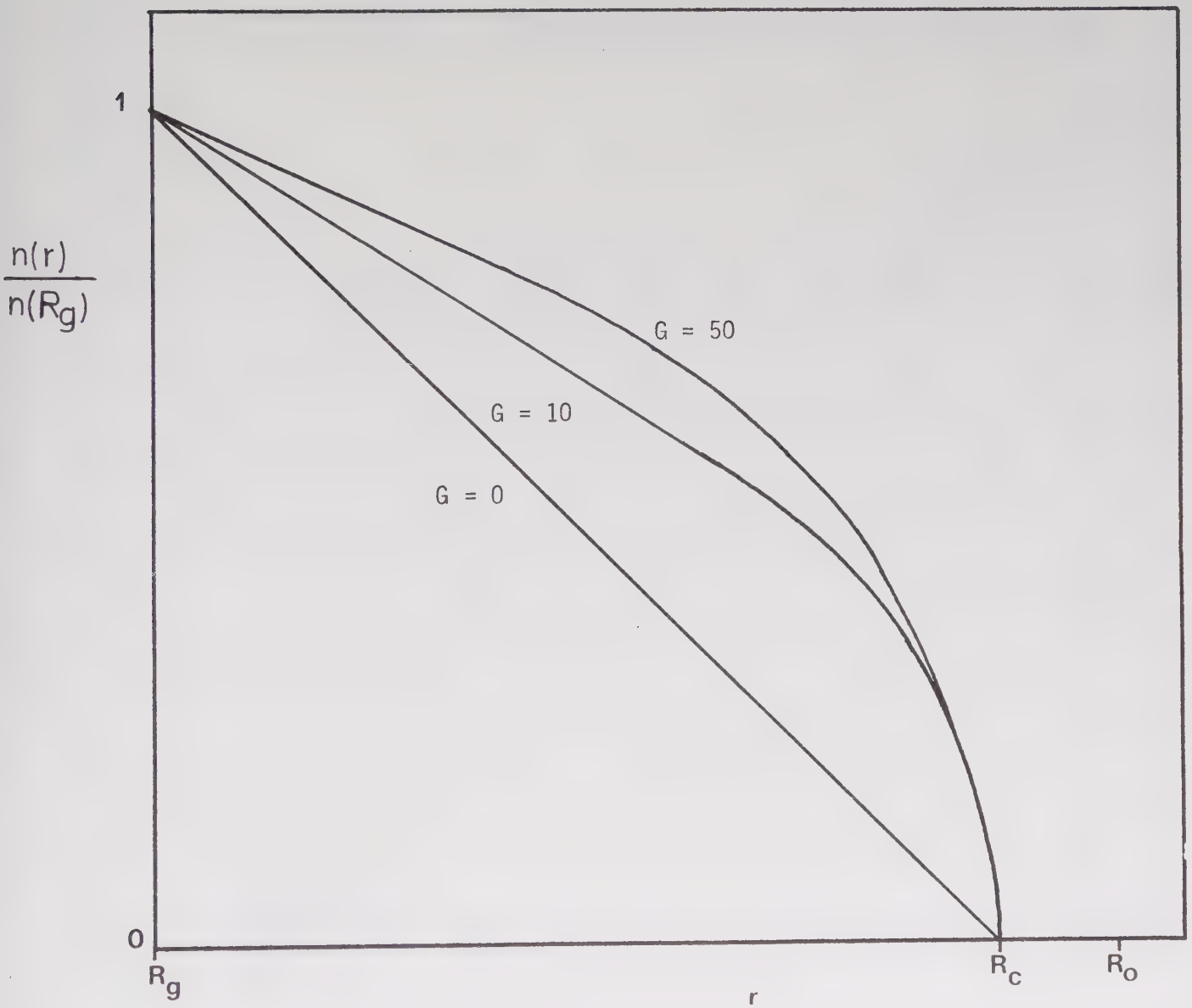
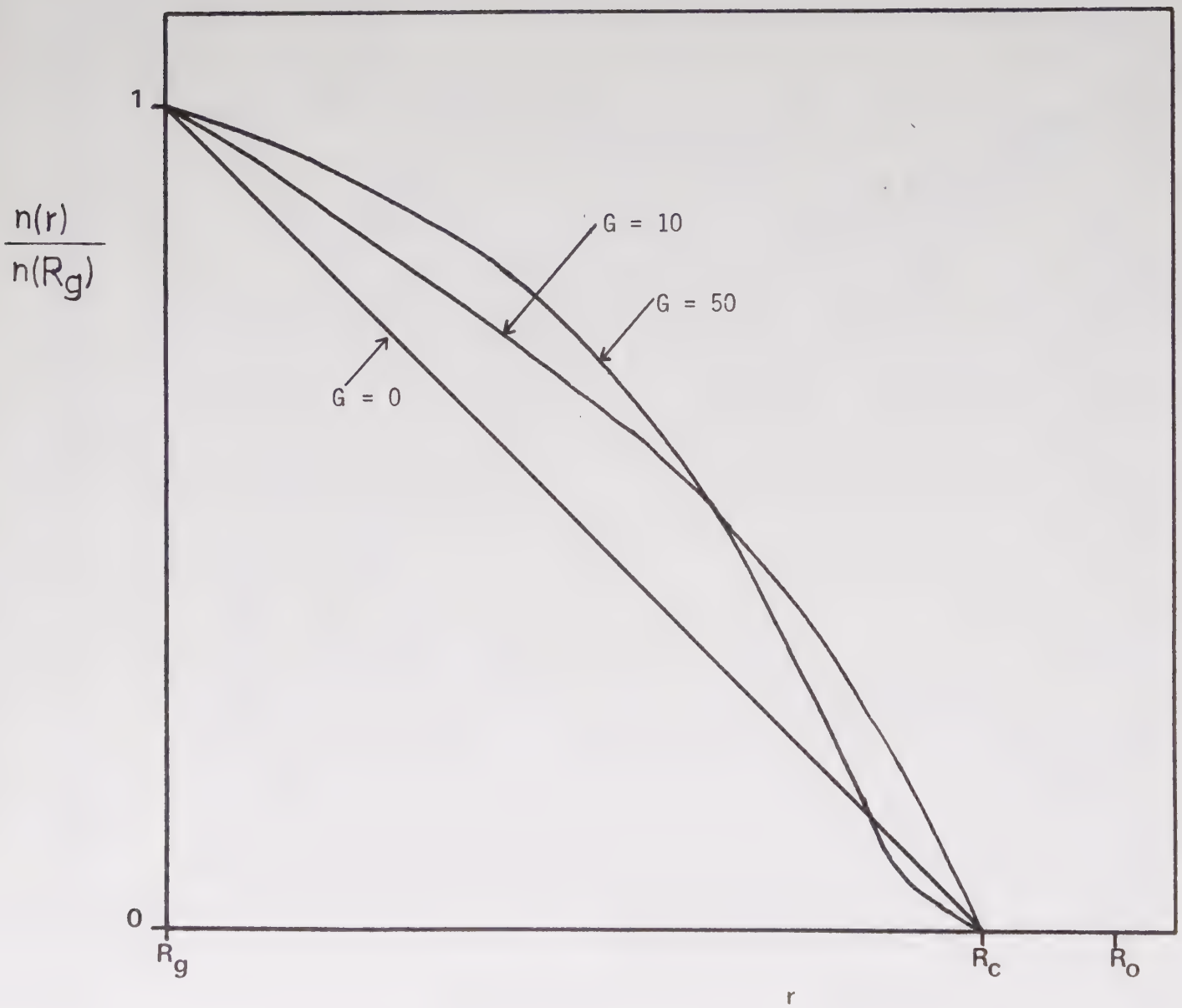


Figure VI.9 - Profil de densité le long du rayon $\varphi = \pi/2m$ (passant entre deux aimants) pour différentes valeurs de G.



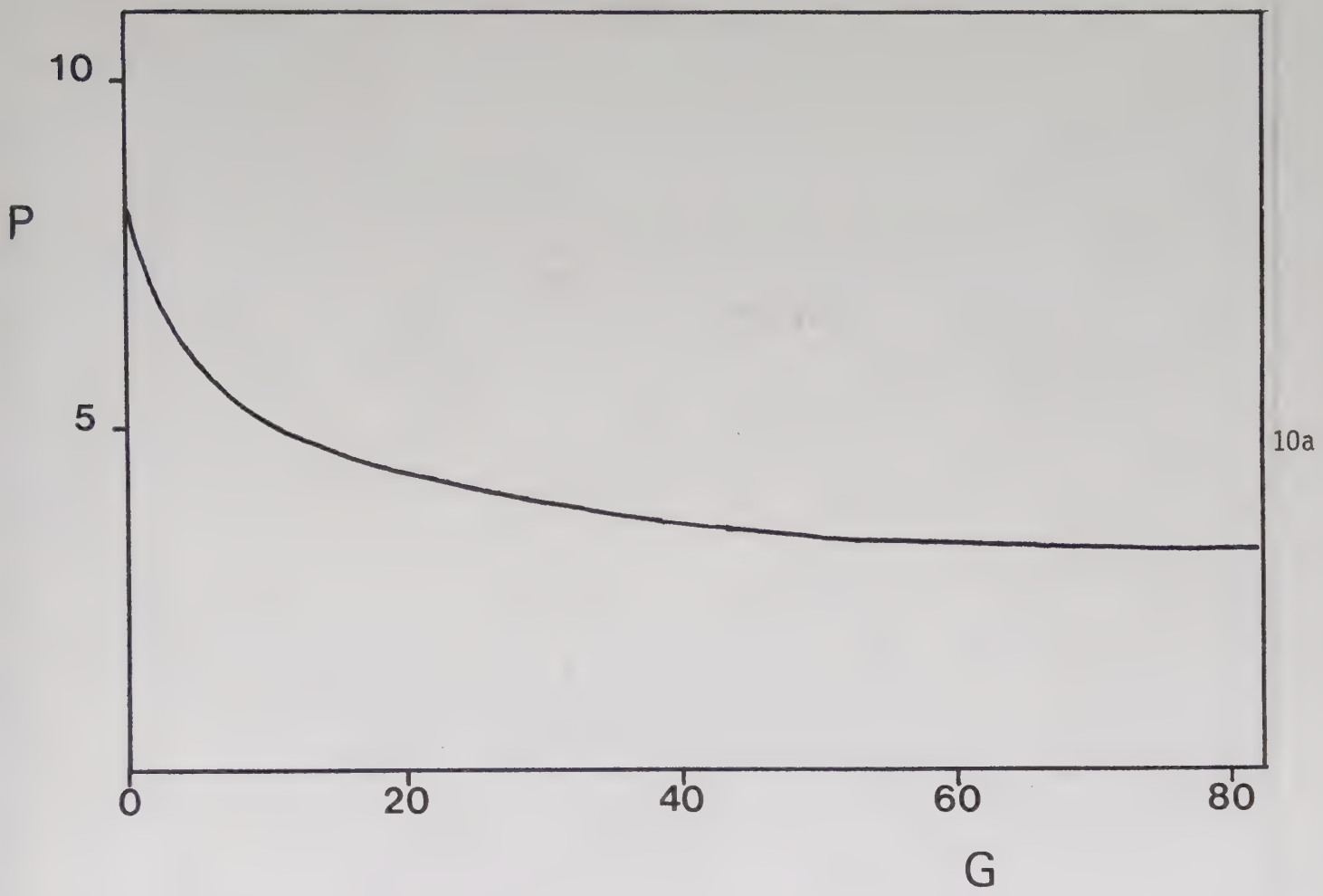
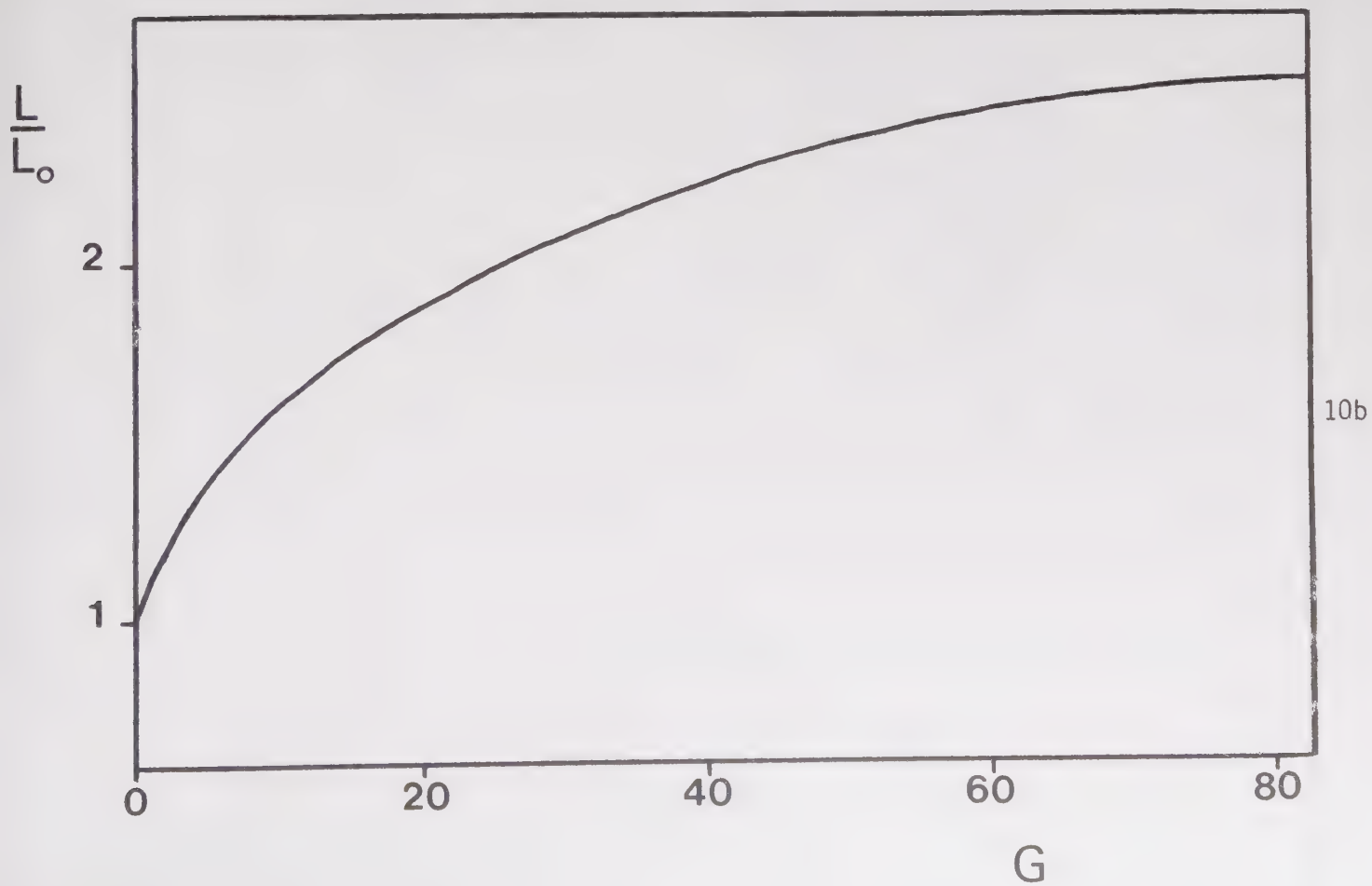
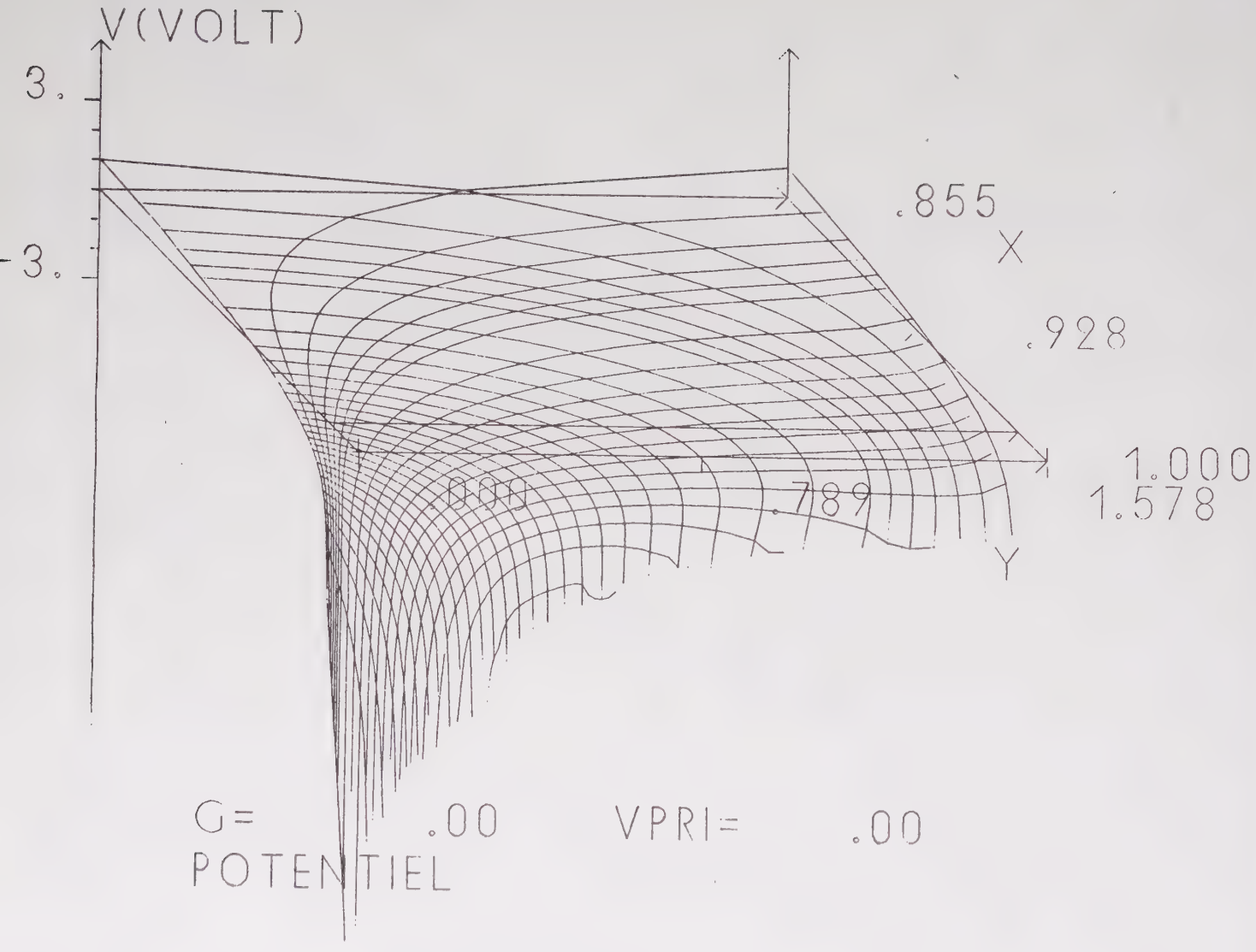


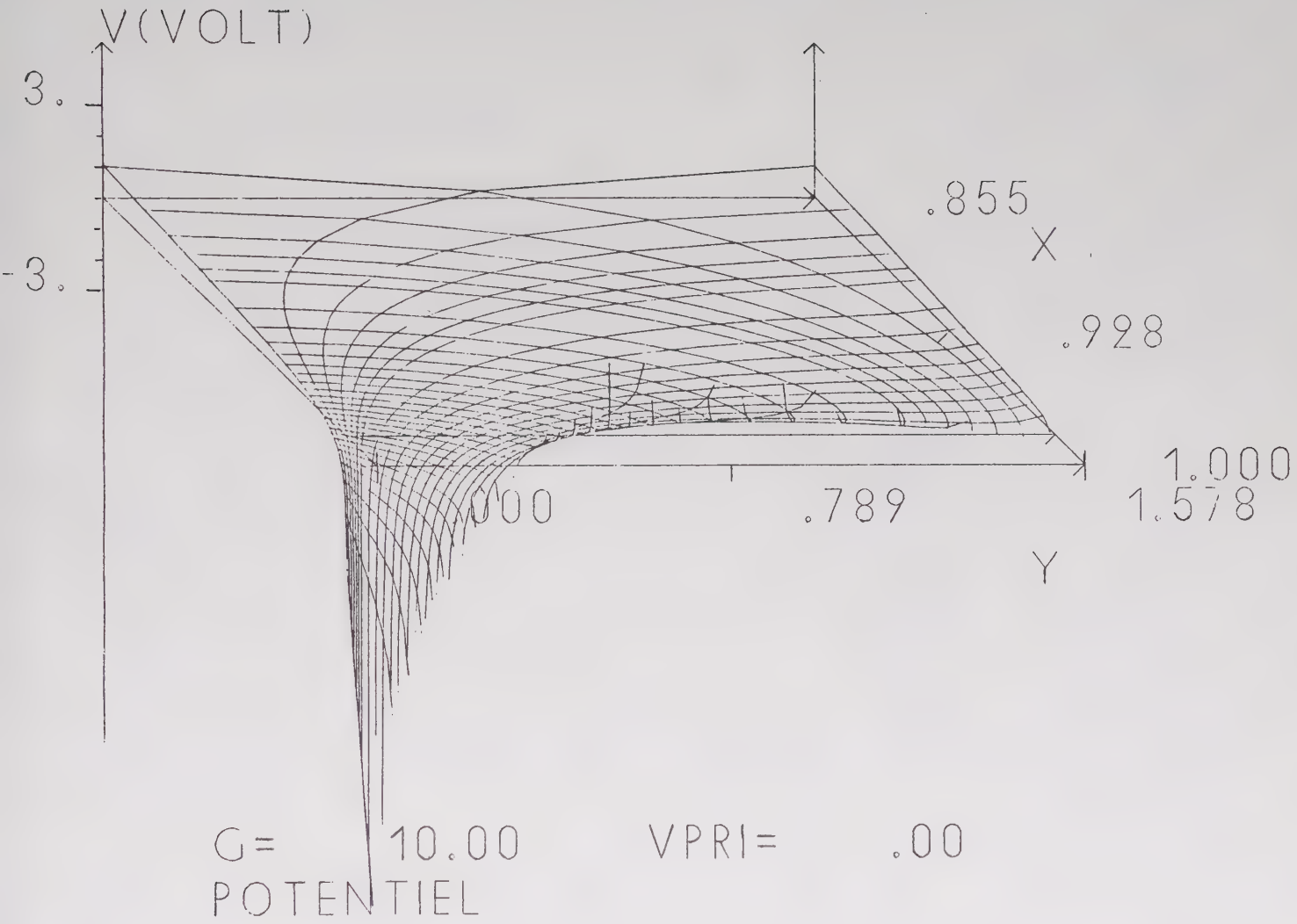
Figure VI.10 - Pente (a) et longueur de gradient (b) en r = R_g.





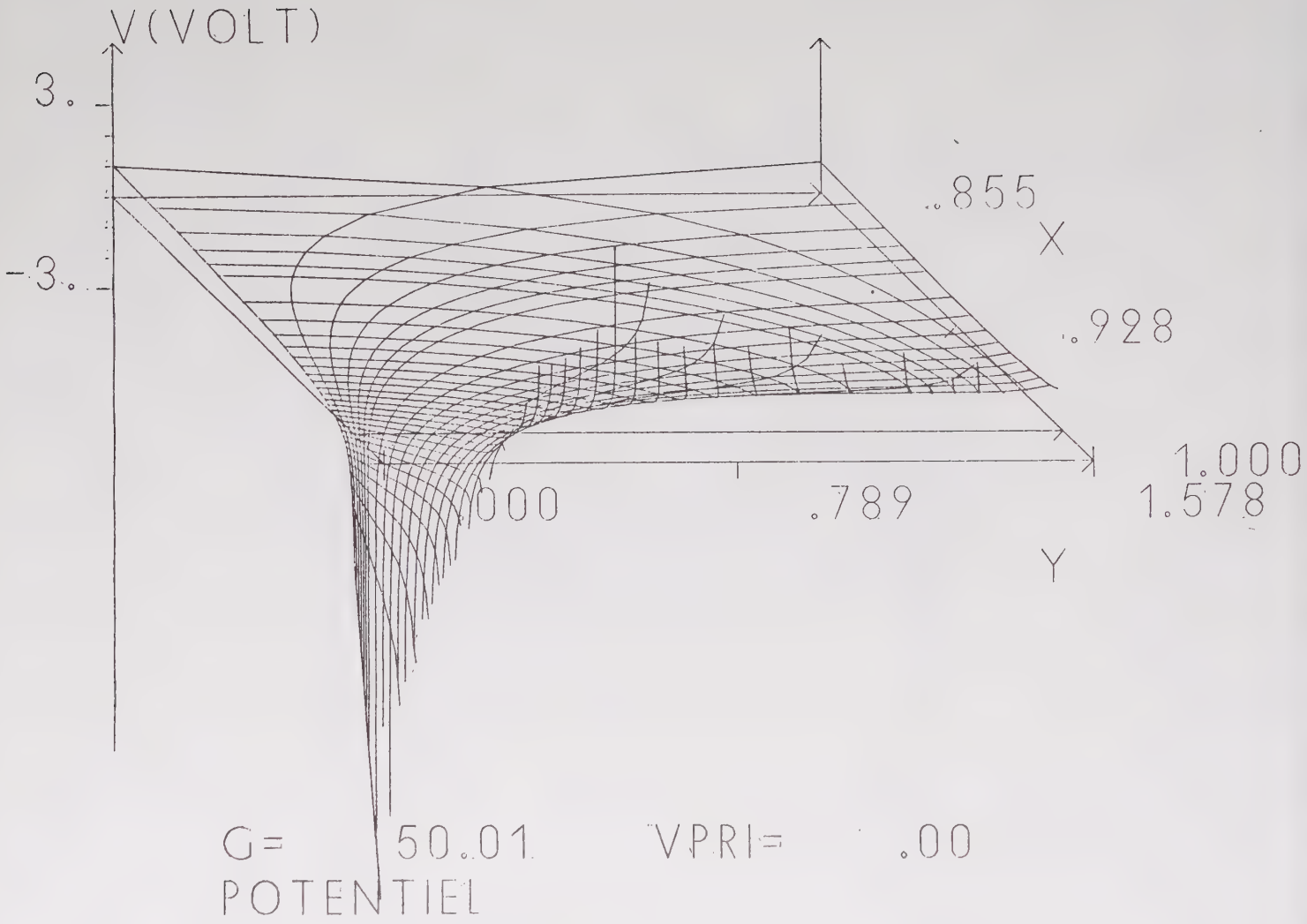
Modèle sans ionisation (multipole)

Figure VI.11



Modèle sans ionisation (multipole)

Figure VI.12



Modèle sans ionisation (multipole)

Figure VI.13

les variations de la pente (figure 10a) ou de la longueur de gradient (figure 10b) au bord de la région II (en $r = R_g$). On voit que cette longueur de gradient augmente avec G, ce qui correspond bien à un aplatissement du profil de densité.

Sur la figure 9 on observe que le profil de densité se creuse avant la paroi. Ce résultat peut s'interpréter en remarquant que le long du rayon $\varphi = \pi/2m$ l'équation de diffusion se réduit à

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{1+gB^2}\frac{\partial n}{\partial r}\right] = 0$$

Par conséquent $\frac{\partial n}{\partial r}$ est proportionnel à $\frac{1+gB^2}{r}$

gB^2 varie très rapidement en fonction de r ; donc pratiquement $\frac{\partial n}{\partial r}$ sera maximal en même temps que gB^2, et le profil de densité présentera un point d'inflexion aux alentours du col.

Les profils de potentiel, pour G = 0, G = 10 et G = 50, sont représentés par les figures 11, 12 et 13. On voit que pour G = 0, le potentiel décroît régulièrement vers la paroi (les valeurs très négatives du potentiel proviennent de ce que l'on a imposé n = 0 sur la coque, sans tenir compte de la séparation de charges qui intervient au voisinage immédiat de celle-ci). Pour G = 10 on observe déjà un relèvement du potentiel entre les cusps, ce qui traduit bien l'inversion du champ électrique prédite au chapitre V et observée expérimentalement par Hershkowitz[6]. Ces phénomènes sont encore plus accentués pour G = 50.

Ce modèle sans ionisation dans la région II montre bien que le champ magnétique a pour effet de réduire les variations de densité dans la région I non magnétisée, et de concentrer ces variations dans la région où le champ magnétique est fort.

3.2 - Modèle avec ionisation : décharge dans un champ multicusp

Dans le cadre du modèle qui fait intervenir l'ionisation par les électrons primaires dans la région II (voir figure 1), les calculs ont été effectués pour un champ multipolaire et pour un champ créé par des fils.

a) Densité au centre

La figure 14 montre les variations du rapport d de la densité au centre avec champ magnétique sur la densité au centre que l'on obtiendrait sans champ (pour G = 0) avec la même efficacité d'ionisation par les électrons primaires. Dans le dispositif à aimants, on ne dépasse pas des valeurs de d supérieures à 1,3, alors que dans le dispositif à fils, on atteint d = 2. Il semble donc que des dispositifs à fils confinent mieux le plasma que des dispositifs à aimants. Mais il faut rappeler que d ne rend compte que de l'augmentation de densité due au confinement du plasma, sans faire intervenir le confinement des électrons primaires. Le fait que d ne dépasse pas 2 confirme les résultats expérimentaux selon lesquels l'augmentation de densité est dûe pour la plus grande partie à l'augmentation de densité des électrons primaires.

b) Profil de densité dans la région I

Les figures 15 et 16 montrent les variations de la densité (réduite à la densité au centre en l'absence de champ magnétique) en fonction de r, dans la région I ($r < R_g$), pour différentes valeurs de G, dans un multipole et dans un dispositif à fils. Là encore, le profil de densité tend à s'aplanir quand G augmente. En effet en l'absence de champ magnétique la densité en $r = R_g$ n'est que 25 % de la densité au centre, alors que pour G = 80, elle est de 45 % de la densité au centre dans le multipole et de 70 % dans le dispositif à fils.

Le rôle du confinement des électrons primaires est de faire subir à ces profils de densité des homothéties de rapport

$$\frac{n_p(G)}{n_p(G=0)}$$

mais il faut remarquer que la forme de ces courbes ne dépend pas de la densité des électrons primaires ; en particulier la longueur de gradient L, définie par

$$L^{-1} = \frac{1}{n(R_g)} \left(\frac{dn}{dr}\right)_{R_g}$$

sera celle fournie par le calcul, et représentée figure 17.

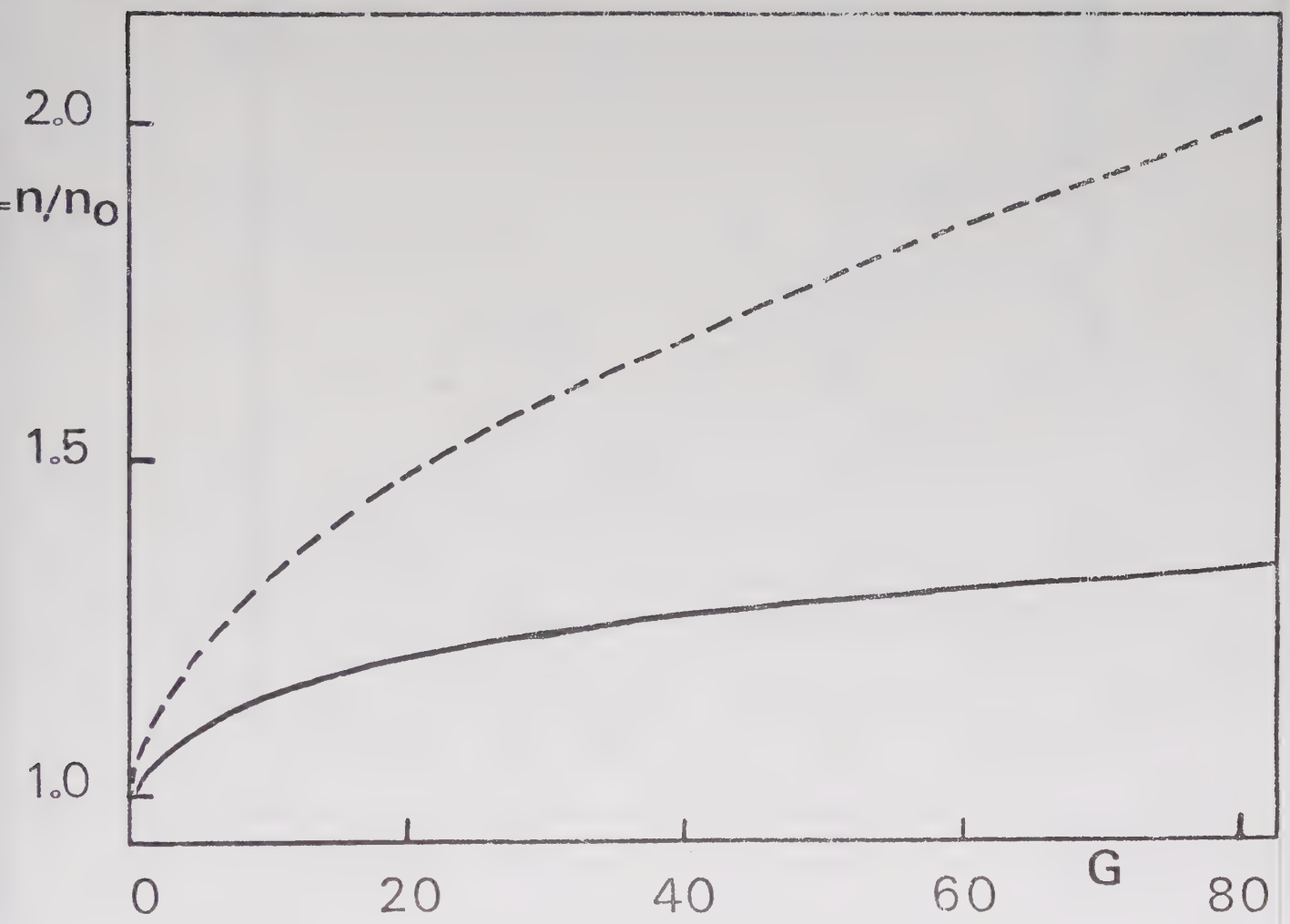


Figure VI.14 - Variations de la densité au centre en fonction de G, calculée en supposant l'efficacité des primaires inchangée.

——— multipole

– – – – dispositif à fils

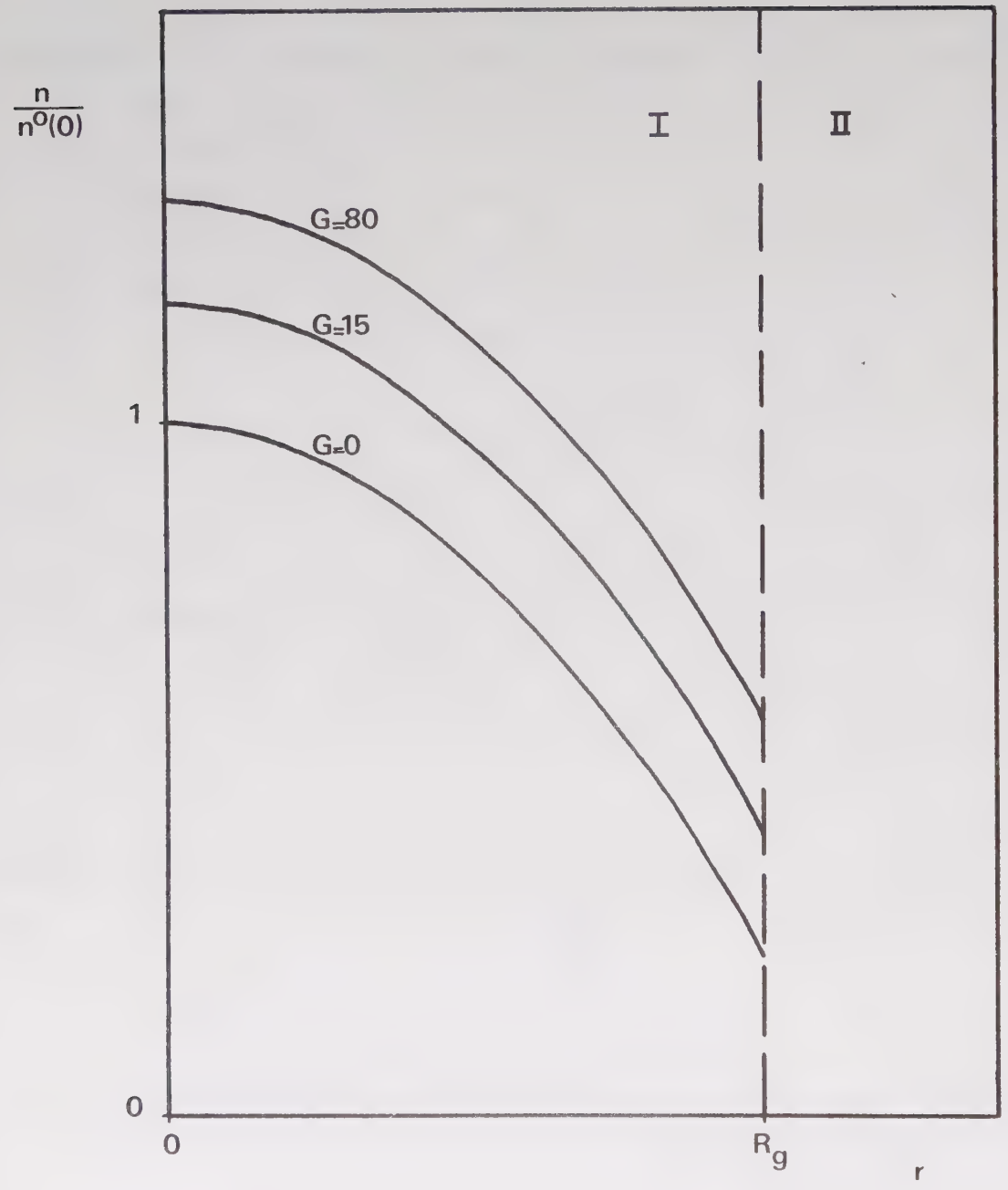


Figure VI.15 - Variations de la densité dans la région I, pour différentes valeurs de G, dans un multipole.

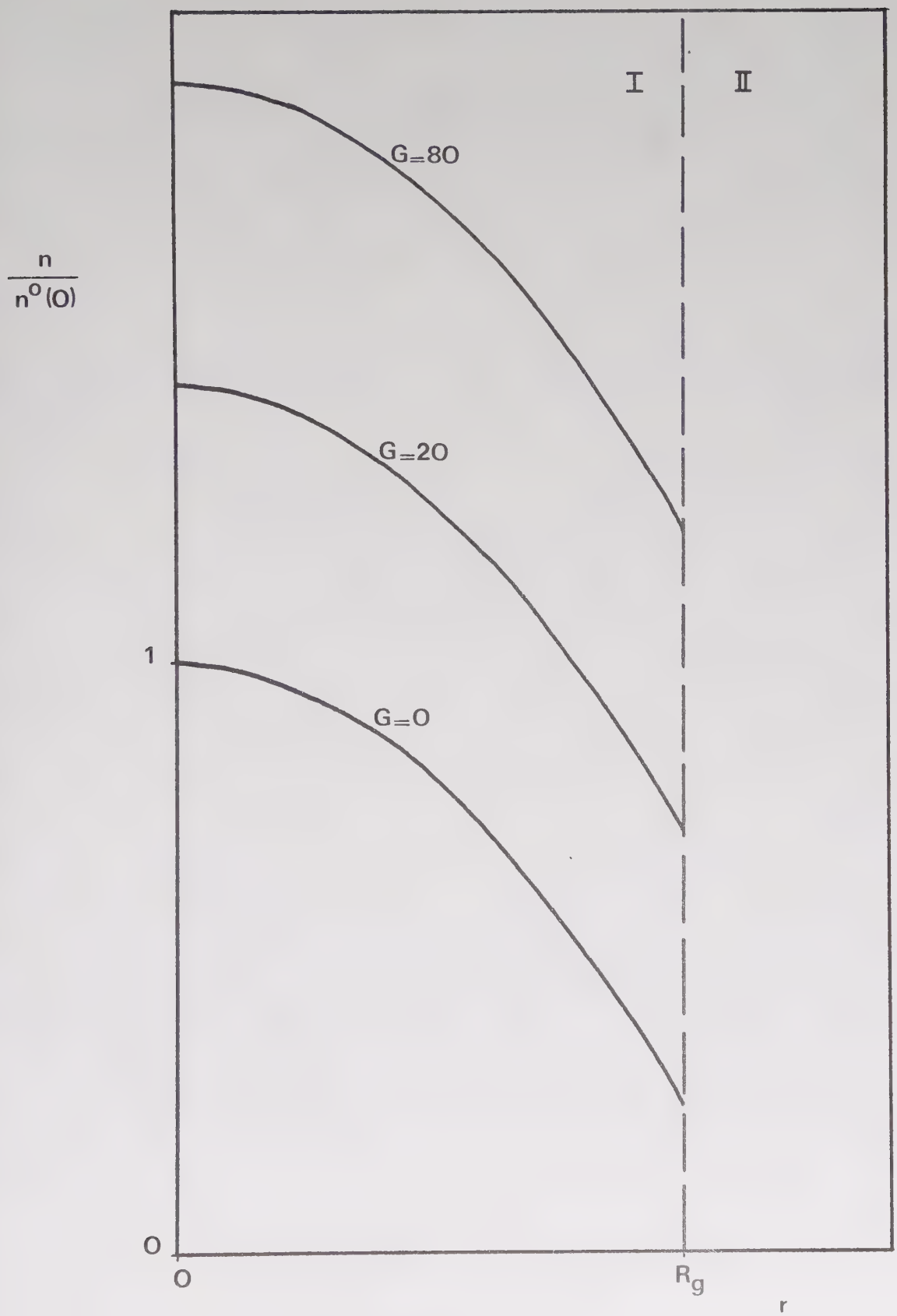


Figure VI.16 - Variations de la densité dans la région I, pour différentes valeurs de G, dans un dispositif à fils.

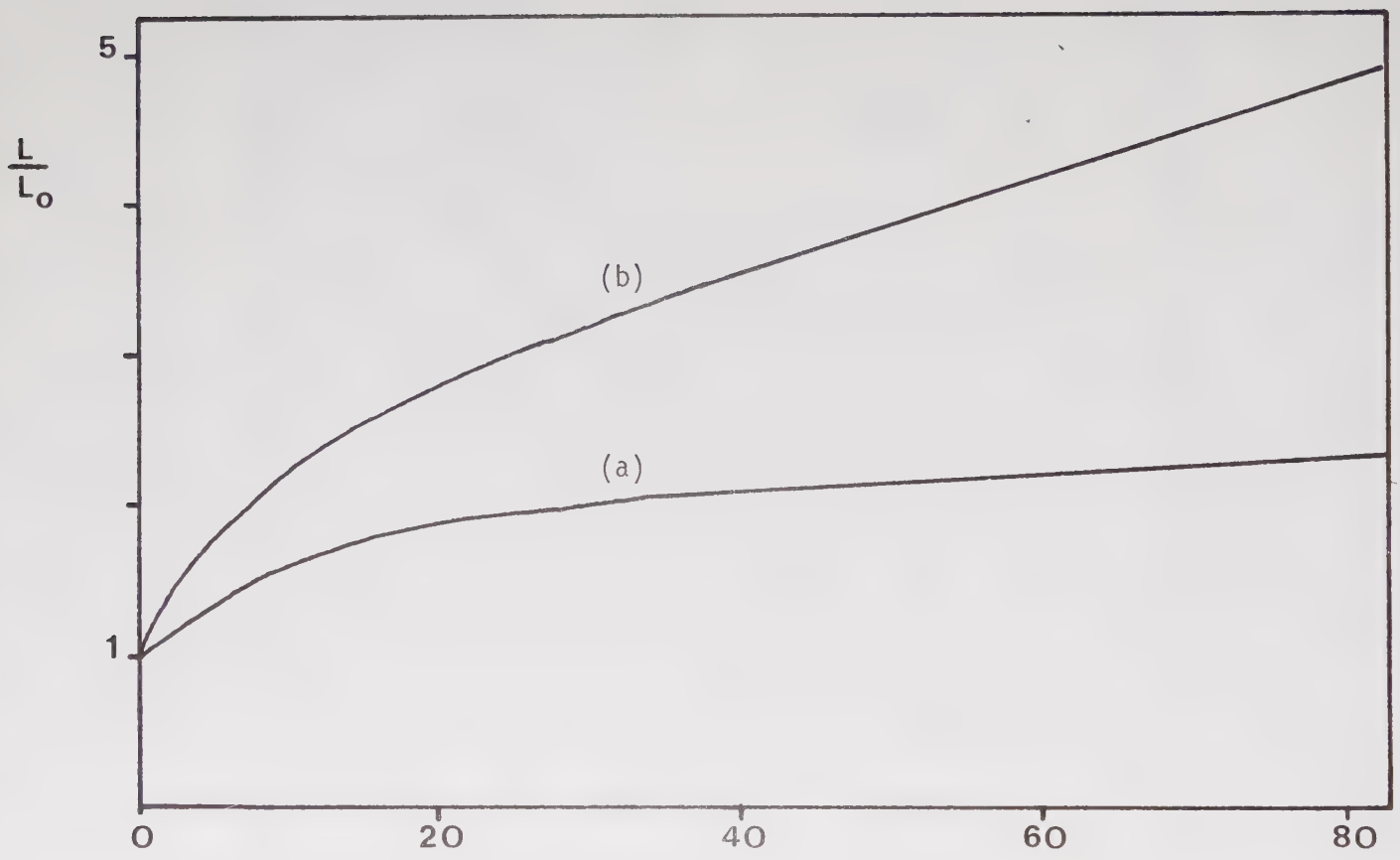
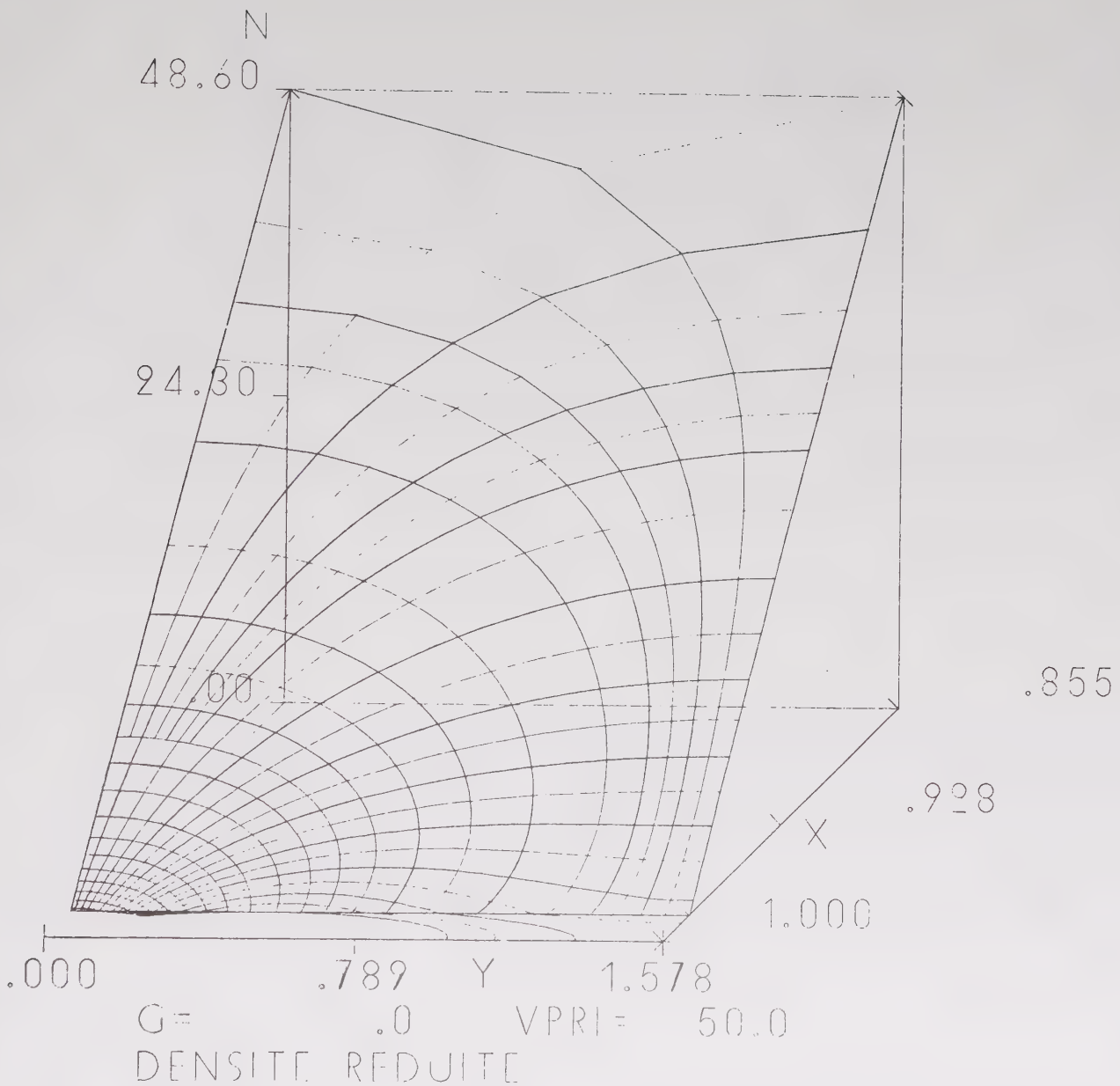
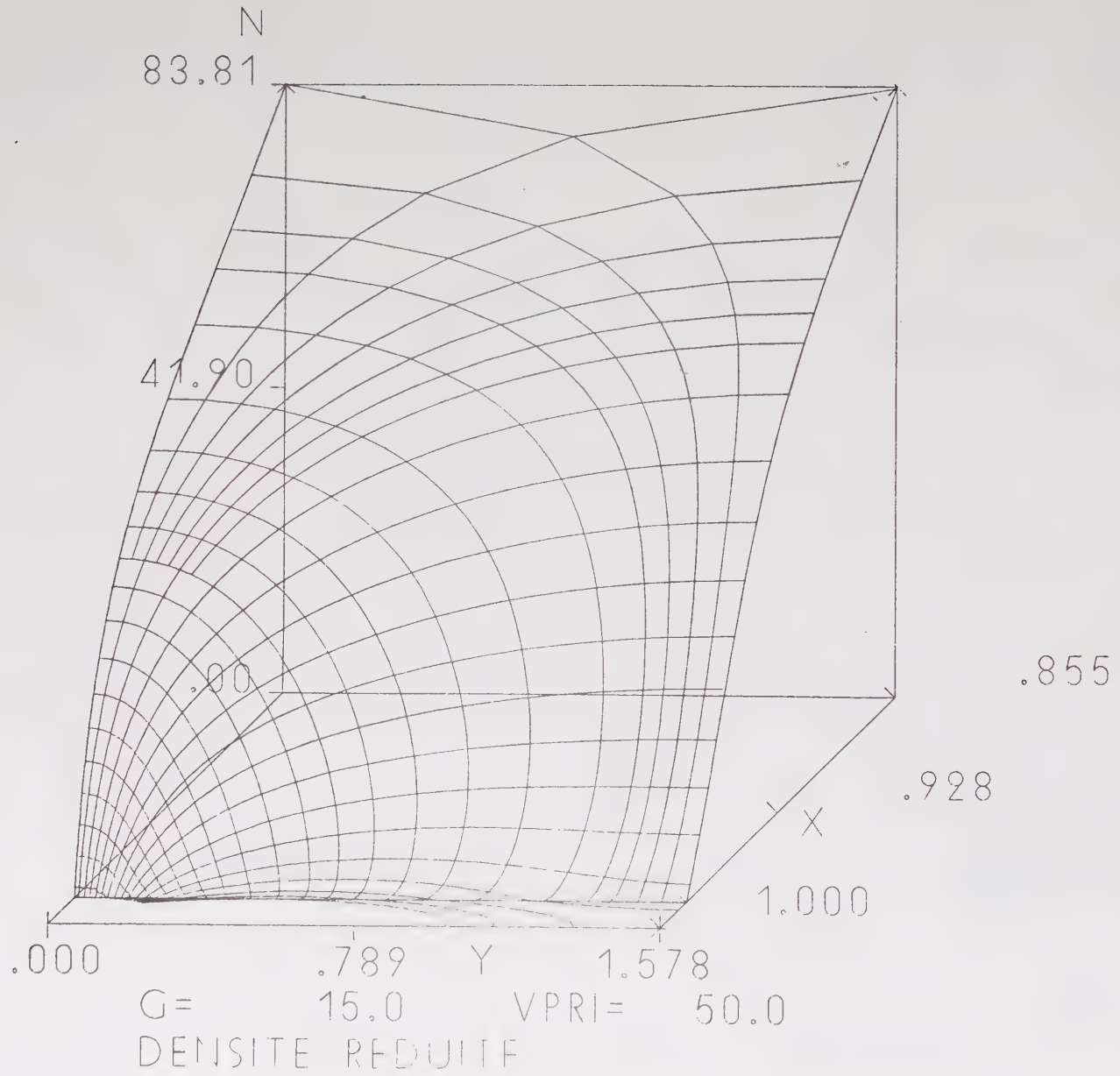


Figure VI.17 - Longueur de gradient (réduite à sa valeur pour G = 0)
(a) cas des aimants
(b) cas des fils



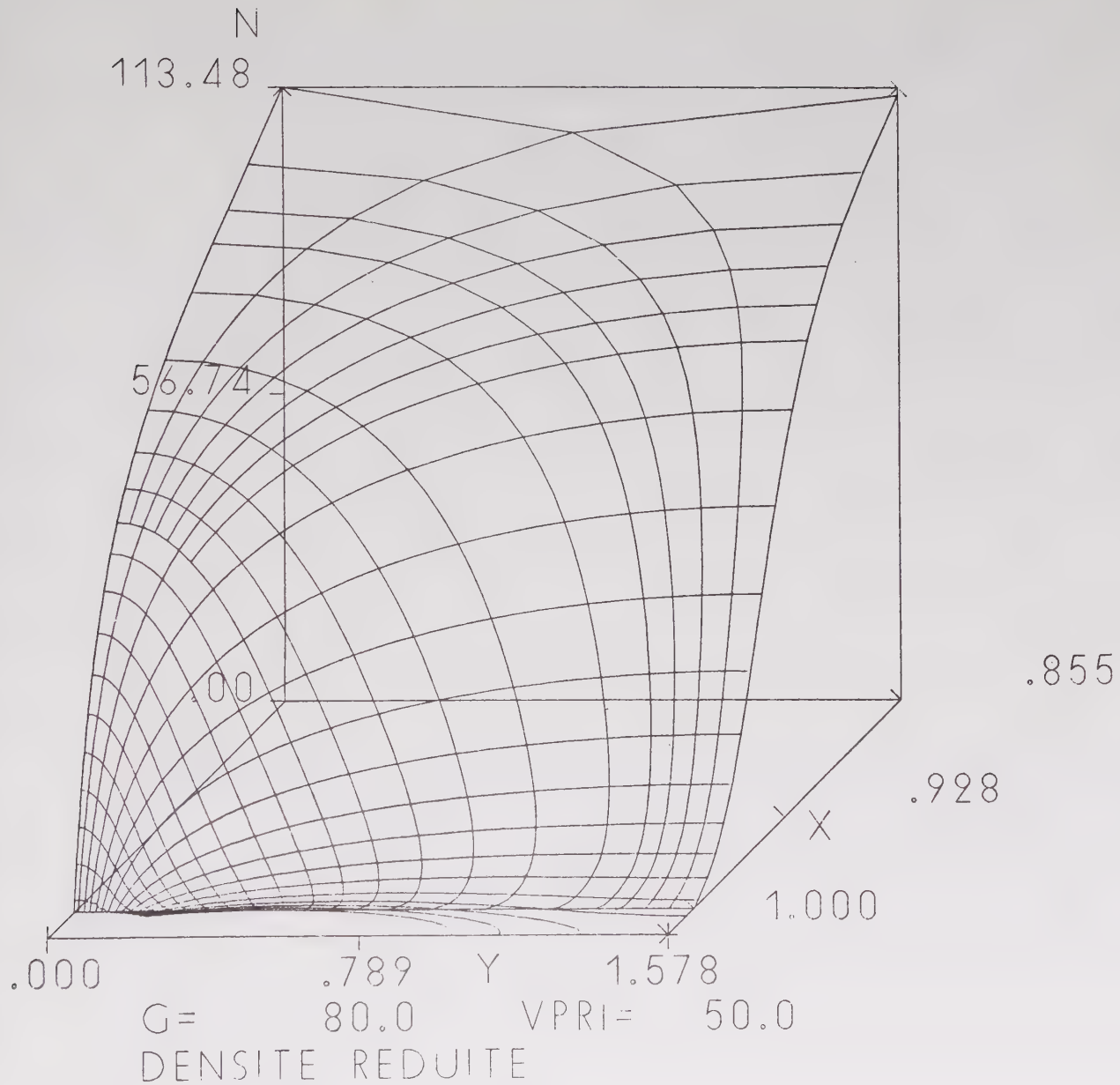
Modèle avec ionisation

Figure VI.18



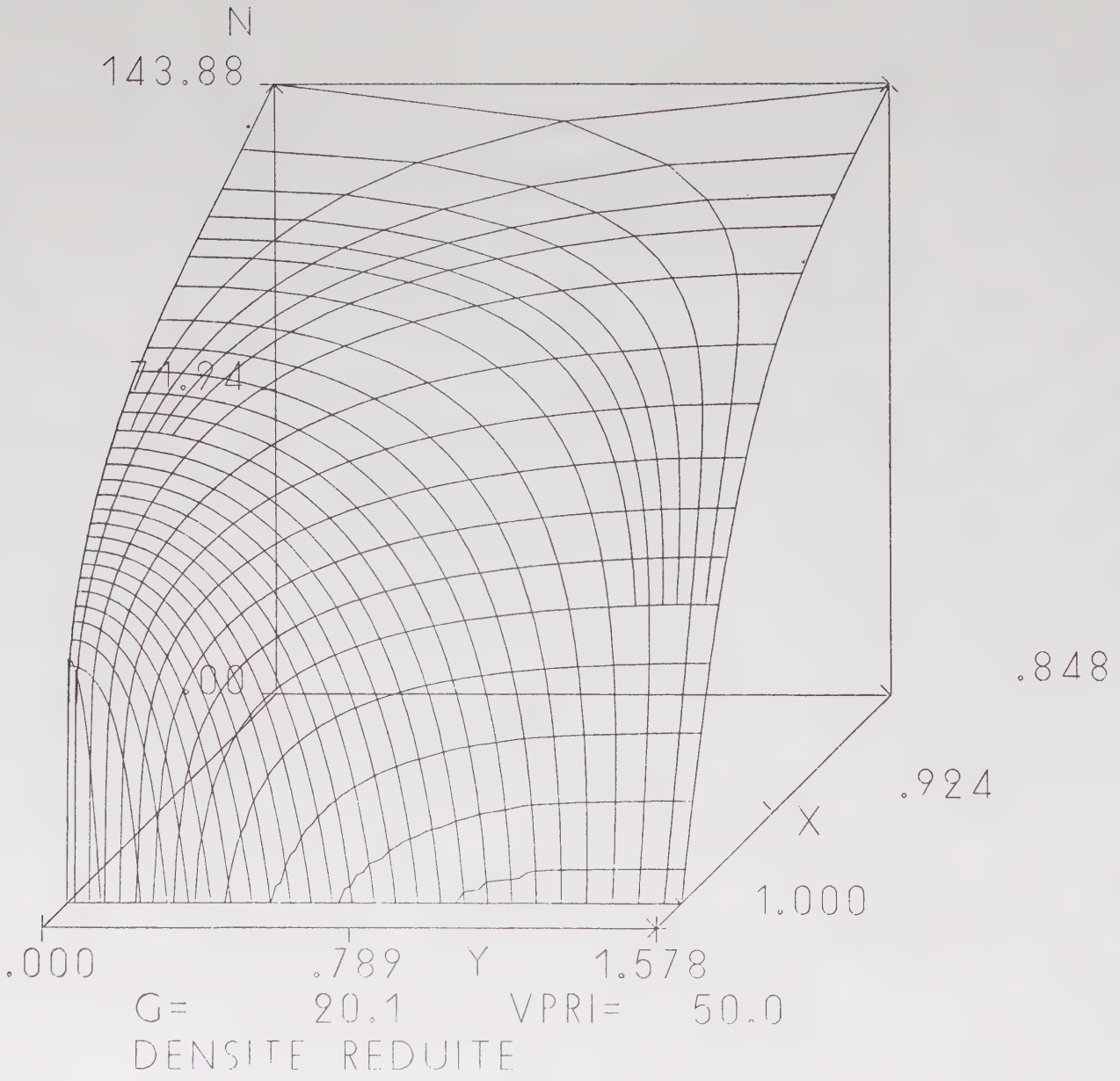
Modèle avec ionisation (multipole)

Figure VI.19



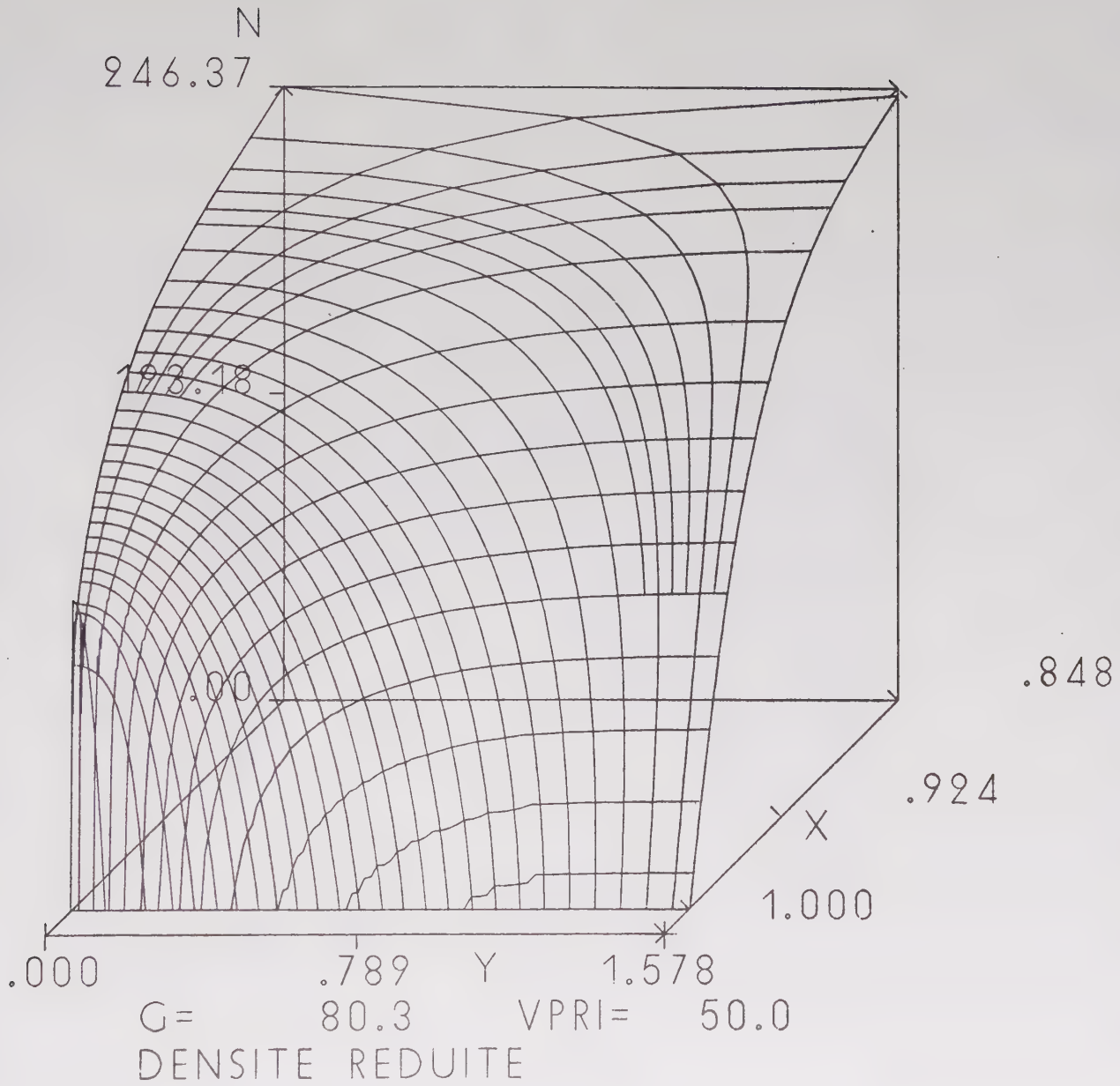
Modèle avec ionisation (multipole)

Figure VI.20



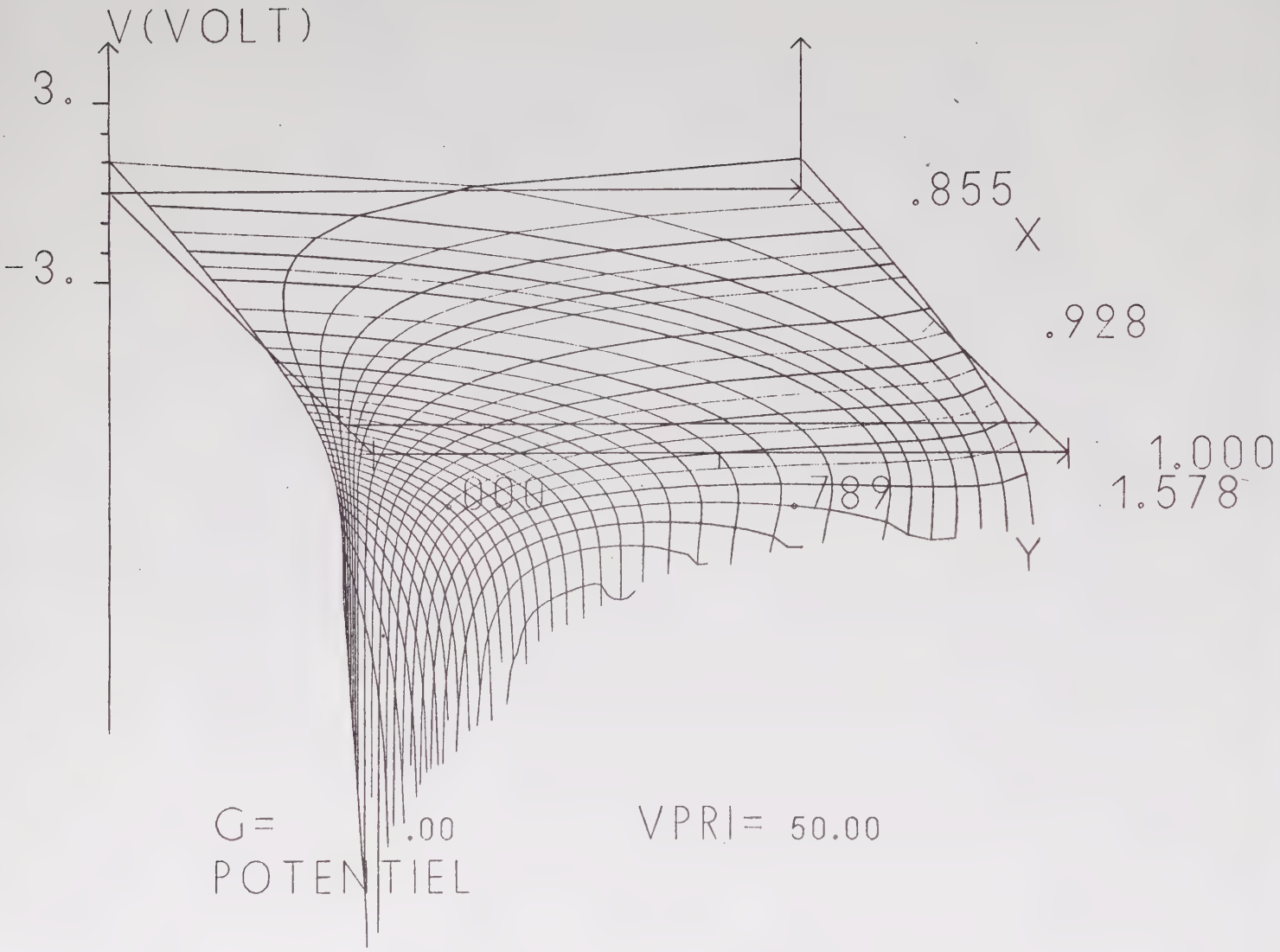
Modèle avec ionisation (dispositif à fils)

Figure VI.21



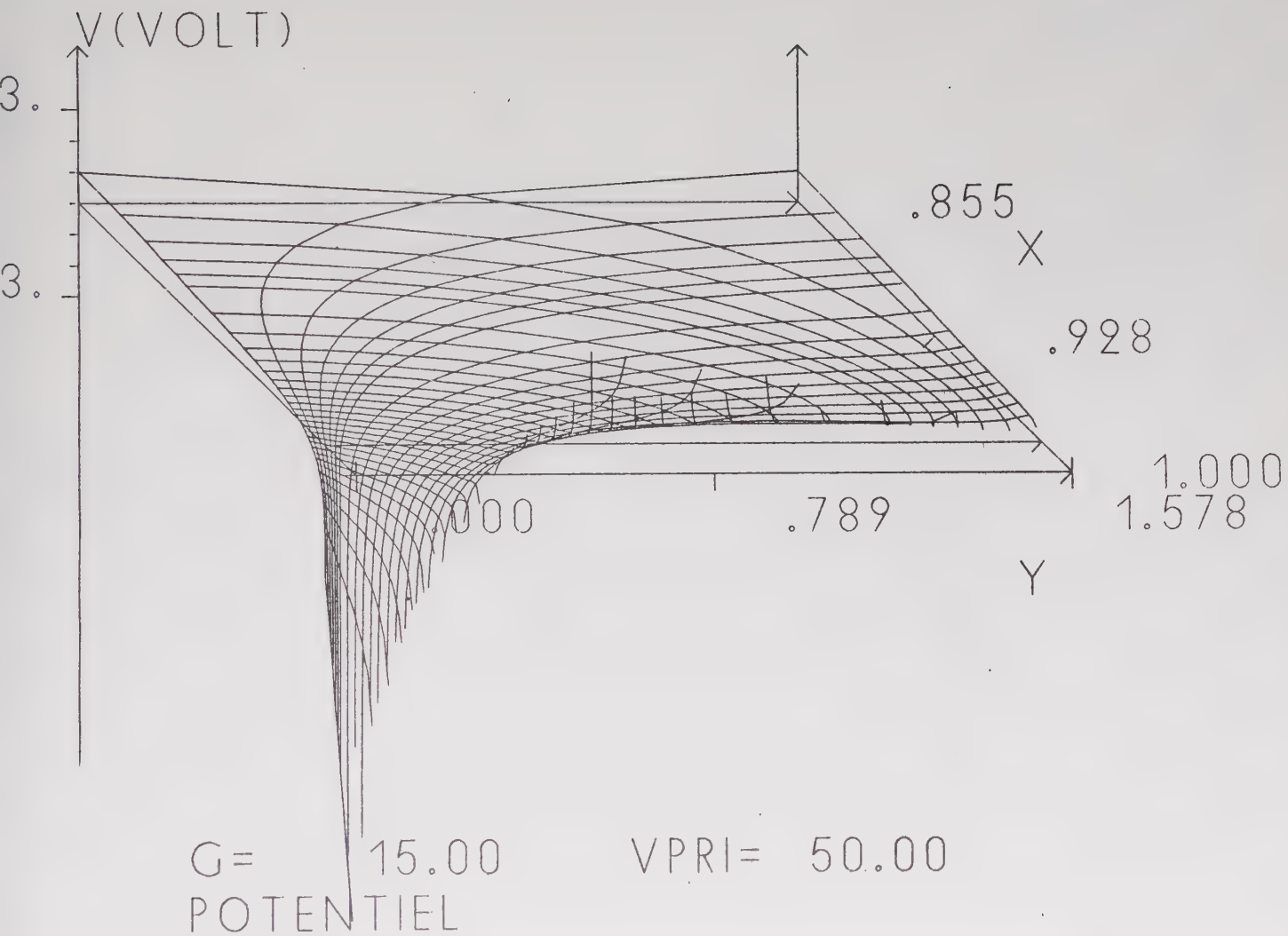
Modèle avec ionisation (dispositif à fils)

Figure VI.22



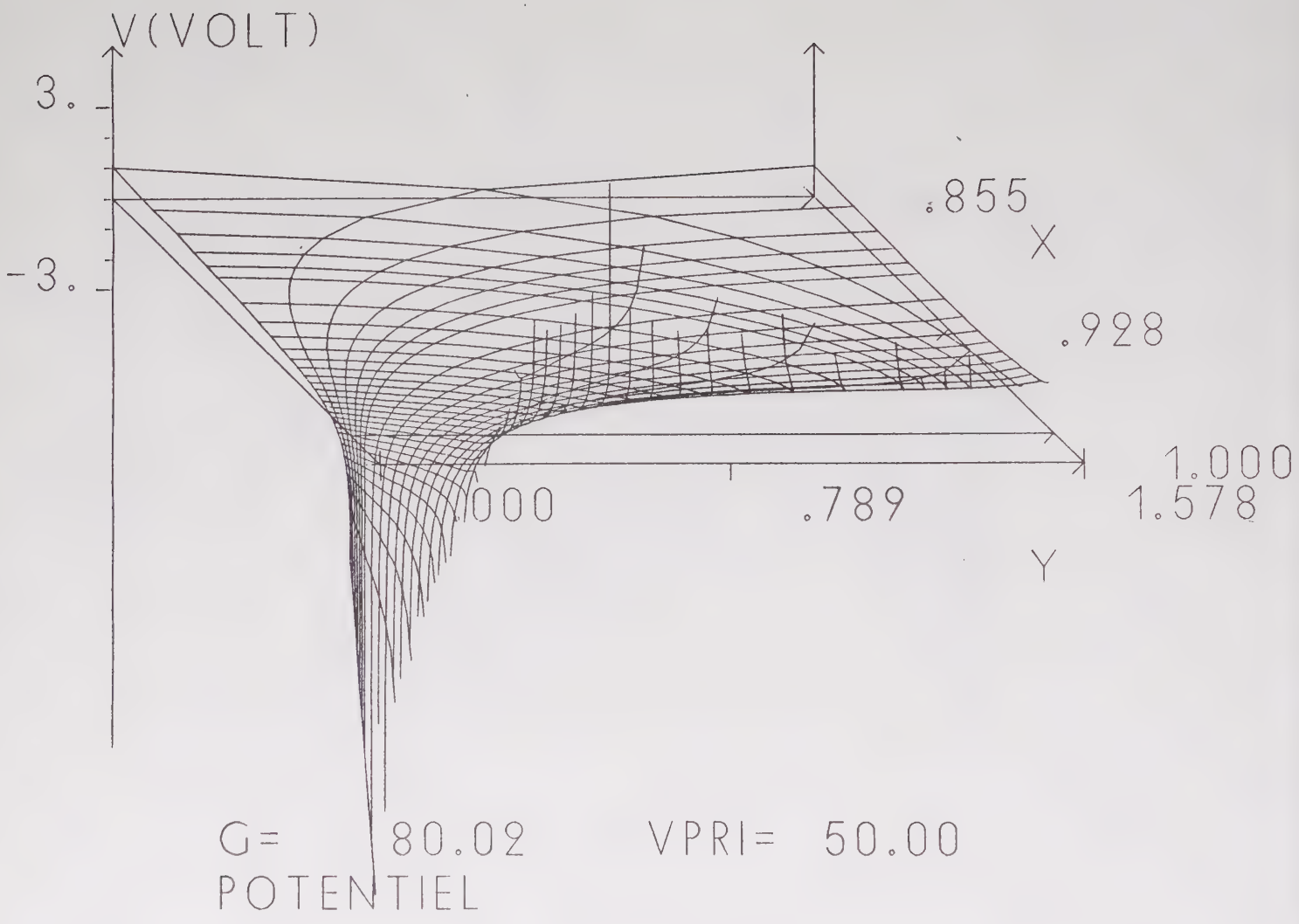
Modèle avec ionisation

Figure VI.23



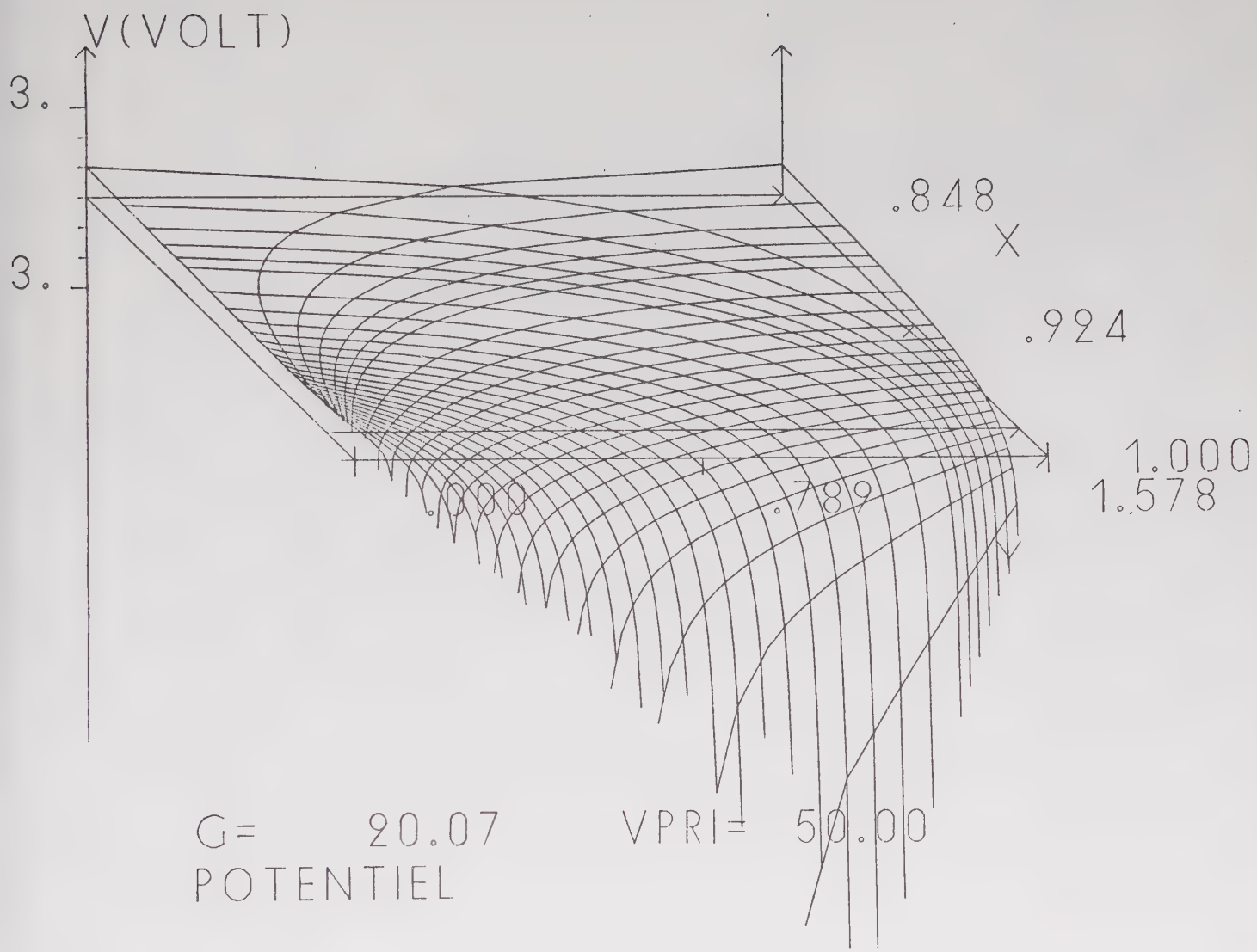
Modèle avec ionisation (multipole)

Figure VI.24



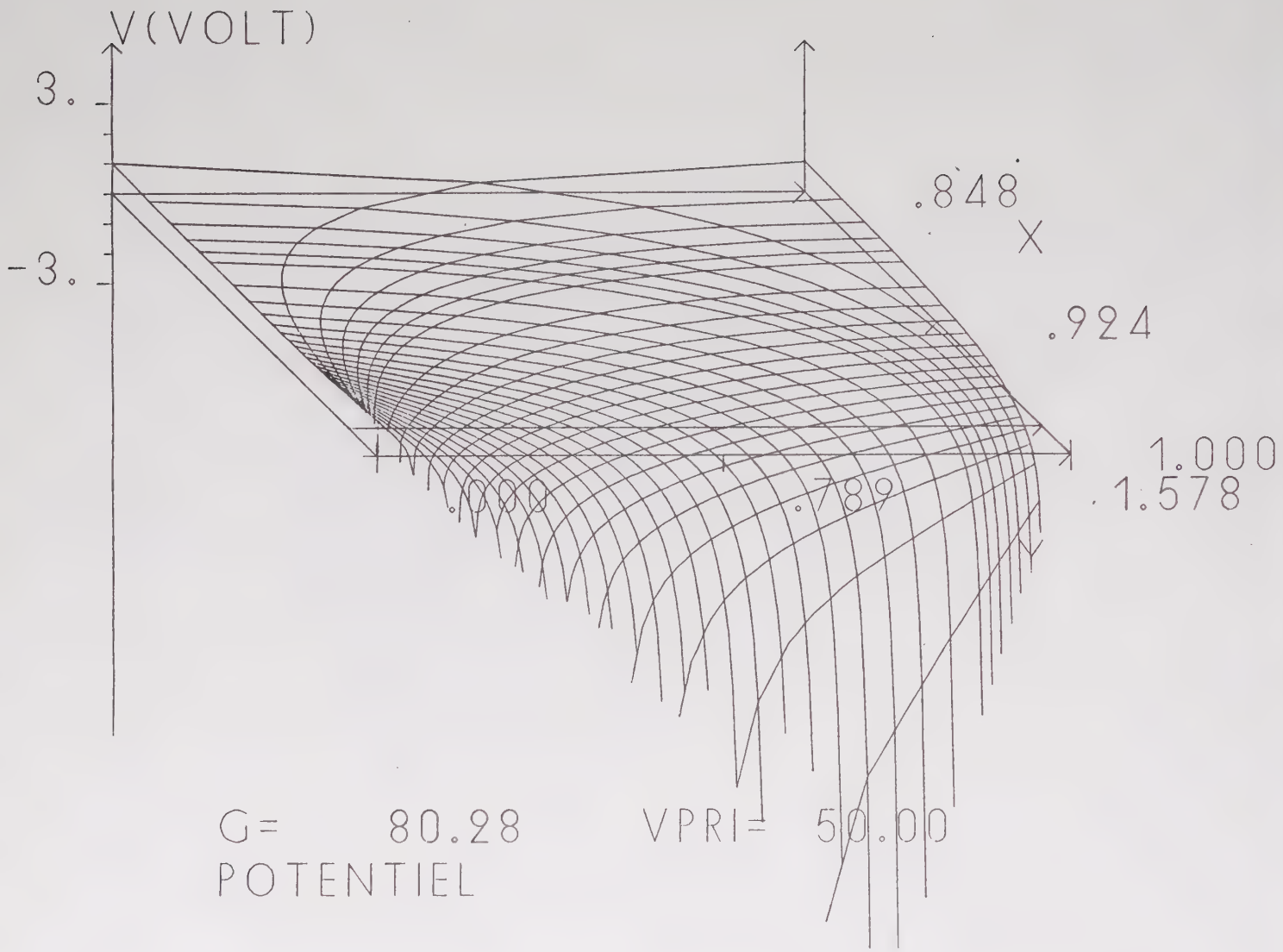
Modèle avec ionisation (multipole)

Figure VI.25



Modèle avec ionisation
(dispositif à fils)

Figure VI.26



Modèle avec ionisation
(dispositif à fils)

Figure VI.27

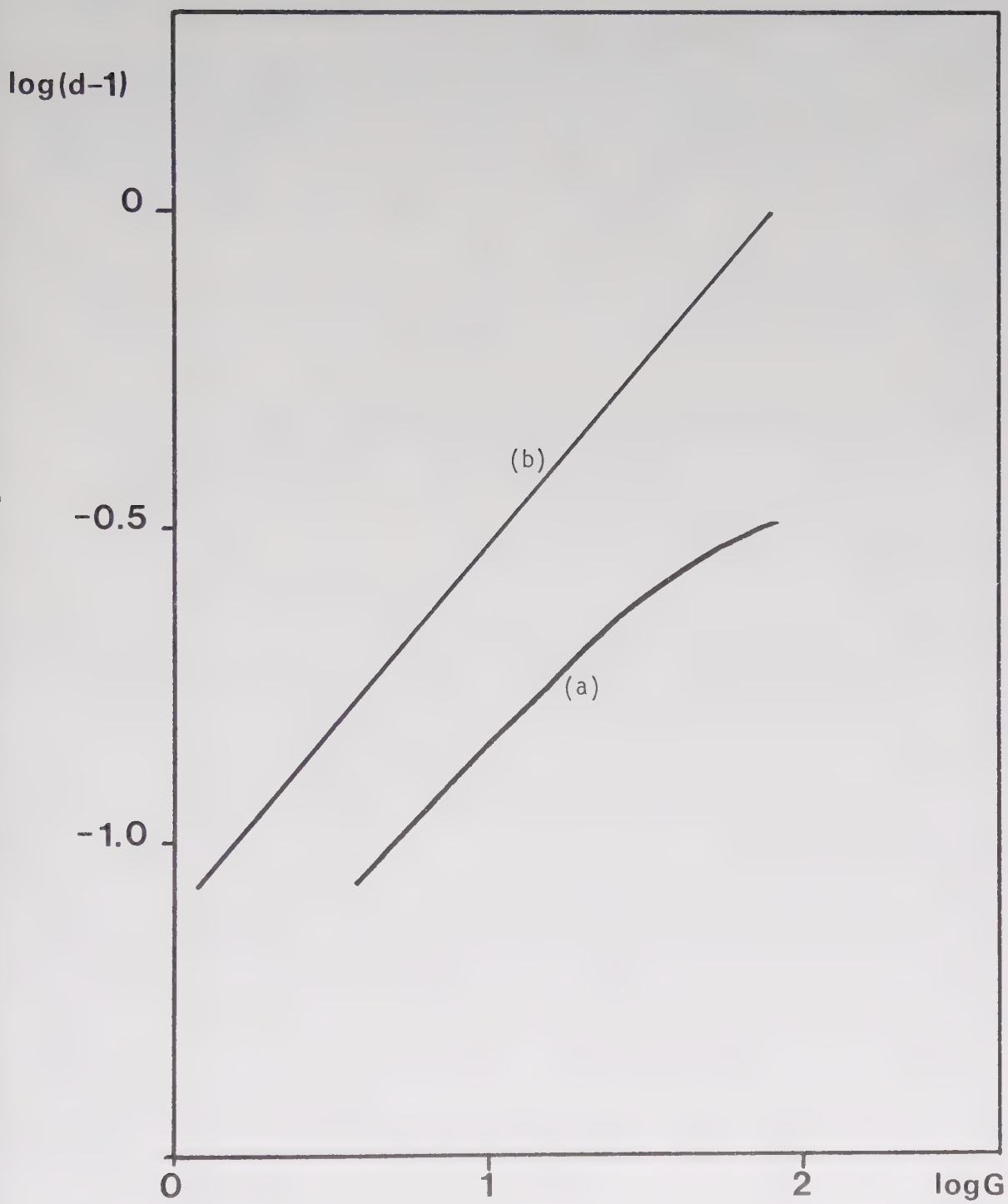


Figure VI.28 - Variations du coefficient de transmission $1-\mathcal{R}_e$ en fonction de G.
(a) multipole
(b) dispositif à fils

c) Profil de densité dans la région II

Le profil de densité dans la région II est représenté dans le multipole pour G = 0, G = 15 et G = 80 (figures 18 à 20) et dans le dispositif à fils pour G = 20 et G = 80 (figures 21 et 22).

Dans le cas du multipole, le profil de densité se bombe à travers le cusp et se creuse entre deux cusps. Ce résultat peut s'interpréter en remarquant que le long du rayon $\pi/2m$ (entre deux cusps) l'équation de diffusion se réduit à

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{1+gB^2}\frac{\partial n}{\partial r}\right] + \frac{\alpha}{D} = 0$$

que l'on peut intégrer une fois, en se rappelant que $\frac{\partial n}{\partial r} = 0$ en $r = 0$:

$$\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\alpha}{D}\frac{r}{2}(1 + gB^2) = 0$$

gB^2 varie très rapidement en fonction de r ; donc pratiquement $\frac{\partial n}{\partial r}$ est maximal là où gB^2 le sera, et le profil de densité présente un point d'inflexion aux alentours du col.

Dans le dispositif à fils au contraire, la densité est moins bombée dans le cusp qu'entre les cusps. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique croît fortement au voisinage du fil, ce qui entraine une augmentation abrupte de la pente au voisinage des fils, donc entre les cusps ; dans le cusp au contraire le champ croît beaucoup plus doucement jusqu'à sa valeur maximale B_o au centre du cusp, ce qui entraine des variations plus douces de la densité.

Là encore les profils de densité sont calculés en supposant que la densité des électrons primaires n_p et donc le terme source α n'ont pas varié du fait du champ magnétique. Le fait de tenir compte de ces variations ne modifierait le profil de densité que par une homothétie, mais ne changerait pas sa forme.

d) Profil de potentiel dans la région II

Les figures 23 à 27 représentent le profil de potentiel pour G = 0, dans le cas des aimants pour G = 15 et G = 80, dans le cas des fils pour G = 20 et G = 80.

En l'absence de champ magnétique (G = 0) le potentiel décroît de façon monotone vers la paroi le long des deux rayons $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2m$. Avec champ magnétique, le potentiel se comporte de la même façon dans le cas des aimants ou des fils : il décroît régulièrement vers la paroi à travers les cusps, alors qu'entre deux cusps le potentiel commence par décroître puis se relève, ce qui correspond bien au fait que dans cette région les ions diffusent plus vite vers la paroi que les électrons.

3.3 - Retour aux coefficients de réflexion

On peut essayer de faire le lien entre la valeur de d déduite des calculs numériques et les valeurs de d trouvées dans la description phénoménologique de la décharge étudiée au chapitre III.

Pour cela remarquons que, dans un modèle utilisant les coefficients de réflexion, et si l'on suppose fixée la densité des électrons primaires, indépendamment du champ magnétique :

$$n(0) - n^o(0) = n(R_g) - n^o(R_g)$$

d'autre part l'existence d'un coefficient de réflexion pour les électrons du plasma se traduit par

$$n(R_g) = \frac{n^o(R_g)}{1-\mathcal{R}_e}$$

donc $$d - 1 = \frac{n^o(R_g)}{n^o(0)} \left[\frac{1}{1-\mathcal{R}_e} - 1\right] \cdot \frac{n^o(R_g)}{n^o(0)}$$ dépend du modèle

Dès que $\mathcal{R}_e$ est supérieur à 0.9, d-1 est proportionnel à $1/1-\mathcal{R}_e$. Par conséquent les variations de d-1 en fonction de G donneront une idée des variations de $1-\mathcal{R}_e$ avec le champ magnétique. La figure 28 montre que dans le cas des aimants, le coefficient de transmission $1-\mathcal{R}_e$ varie comme $G^{-1/2}$, donc comme B_o^{-1}, mais ceci seulement pour des valeurs de G inférieures à 50. Pour des champs plus intenses, le coefficient de transmission diminue moins vite que $1/B_o$. Il se révèle donc hatif d'écrire - comme l'on fait certains auteurs[7] - que le coefficient de transmission est de l'ordre du rapport de la surface des trous de fuite (proportionnelle à $1/B_o$) à la surface totale de la paroi. Un tel calcul sous-estime en effet beaucoup les pertes de plasma à travers les cusps.

CONCLUSION

Une remarque s'impose, qui concerne l'ordre de grandeur du champ B_0 que nous avons pu envisager dans notre calcul numérique sans dépasser des temps de calcul de l'ordre de 5 à 10 mm. Nous avons atteint $G = 80$, ce qui correspond à $B_0 \approx 135$ Gauss (pour $\beta = 1$) (on rappelle que dans le cas des fils B_0 est le champ au cusp et dans le cas des aimants $B_0/2$ est le champ au col entre deux cusps). Dans les dispositifs pratiques, B_0 est de l'ordre de 500 Gauss, aussi bien dans le cas d'une grille de courants que dans le cas d'un multipole, ce qui correspond à $G \approx 10^3$.

. Cependant notre étude, quoique limitée à des champs relativement faibles, rend bien compte des phénomènes observés expérimentalement et jusqu'à présent mal expliqués, à savoir :

- la taille des trous de fuite des ions, proportionnelle au rayon de Larmor hybride ;

- l'épaisseur de la gaine (c'est à dire de la région où sont localisées les variations de la densité et du potentiel), qui dépend peu de la force du champ et de la densité du plasma mais surtout de la géométrie du champ ;

- l'inversion du champ électrique perpendiculairement aux lignes de champ, et donc l'apparition d'ilots de potentiel élevé entre les cusps ;

- le mauvais confinement des ions et des électrons du plasma, au premier abord en contradiction avec l'augmentation de densité du plasma, mais qui confirme le fait que cette augmentation est due essentiellement au confinement des électrons primaires.

Nous avons fait toute notre étude en considérant que la pression était égale à 10^{-3} Torr et la densité du plasma de 10^{12} ions par cm^3. On peut remarquer que la pression et la densité définissent les mobilités μ_i et μ_e' intervenant dans $G = \beta \mu_i \mu_e' B_0^2$. Par conséquent on peut transposer les résultats du calcul numérique à d'autres conditions de pression et de densité en faisant varier le paramètre G, en supposant la valeur du champ B_0 fixée.

Il faut cependant rappeler que cette théorie de diffusion n'est valable que dans un domaine de pression donné, où le plasma est assez collisionnel. En effet à plus basse pression il faudrait faire intervenir le piègeage d'électrons du plasma dans les régions de potentiel élevé, qui tendrait à abaisser le potentiel dans ces régions. Dans ce cas les effets électrostatiques ne sont plus liés uniquement au mouvement macroscopique des particules du plasma, et notre étude n'est plus valable. De plus, quand la pression devient si basse que les libres parcours moyens des particules deviennent supérieurs aux dimensions du plasma, on ne peut plus utiliser les équations macroscopiques.

APPENDICE 0

GRANDEURS INTERVENANT DANS LE MODELE DE DECHARGE MULTIPOLAIRE

Nature du gaz : argon

Pression résiduelle : $p = 10^{-3}$ Torr

densité d'atomes neutres : $n_o = 3{,}54.10^{13}$ cm^{-3}

Densité électronique du plasma : $n = 10^{12}$ cm^{-3}

fréquence plasma : $\nu_{pe} = 9\ 10^{9}$ s^{-1}

Température électronique : $T_e = 1$ eV

vitesse thermique : $v_{the} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT_e}{m_e}} = 6{,}7.10^{5}$ m.s^{-1}

longueur de Debye : $\lambda_D = 7{,}43.10^{-6}$ m

logarithme coulombien : $\ell n\ \Lambda = 9{,}18$

$(\Lambda = 9{,}7.10^{3})$

Température ionique : $T_i = 0.2$ eV

vitesse thermique : $v_{thi} = 10^{3}$ m.s^{-1}

Energie des électrons primaires : $V_p = 50$ eV

vitesse des électrons primaires : $v_p = \sqrt{\frac{2eV_p}{m_e}} = 4{,}2.10^{6}$ m.s^{-1}

Collisions sur les neutres : transfert de la quantité de mouvement :

- électrons primaires -

section efficace $\sigma_{50}^{e-n} = 8.10^{-20}$ m^2

fréquence de collision $\nu_{50}^{en} = 1{,}34.10^{7}$ s^{-1}

libre parcours moyen $\lambda_{50}^{e-n} = 30$ cm

} à 10^{-3} Torr

- électrons du plasma -

section efficace $\sigma_1^{e-n} = 1{,}4.10^{-20}\ m^2$

fréquence de collision $\nu_1^{e-n} = 3{,}3.10^5\ s^{-1}$

libre parcours moyen $\lambda_1^{e-n} = 2\ m$

mobilité électronique ne tenant compte que des collisions électron-neutre : $\mu_e = 5{,}35.10^5\ m^2 s^{-1} V^{-1}$

Collisions ion-neutre avec transfert de charge :

fréquence de collision : $\nu_{in}^{*} = 1{,}6.10^{+4}\ s^{-1}$

libre parcours moyen : $\lambda_{in}^{*} = 6{,}25\ cm$

} à 10^{-3} Torr

Collisions ion-neutre sans transfert de charge :

on connait la mobilité des ions Ar^+ :

$\mu_i = 1{,}13.10^2\ m^2 V^{-1}$ à 10^{-3} Torr

d'où l'on peut déduire une fréquence de collisions équivalente

$\nu_{in} = 2{,}14.10^4\ s^{-1}$

et un libre parcours moyen : $\lambda_{in} = 4{,}67\ cm$

Collisions ionisantes des primaires sur les neutres :

section efficace : $\sigma_{50}^{i} = 2{,}54.10^{-2}\ m^2$

fréquence des collisions ionisantes : $\nu_{50}^{i} = 4{,}24.10^6\ s^{-1}$

libre parcours moyen : $\lambda_{50}^{i} = 1{,}10\ m$

Collisions coulombiennes :

- collisions électron-ion -

$$\nu_{ei} = 0{,}8\ \omega_{pe}\ \frac{\ell n \Lambda}{\Lambda} = 4{,}28.10^7\ s^{-1}$$

- collisions électron-électron -

$$\nu_{ee} = 4{,}28.10^7\ s^{-1}$$

- collisions ion-ion -

$$\nu_{ii} = 5.10^6 \ s^{-1}$$

- libre parcours moyen des électrons pour les collisions coulombiennes -

$$\lambda_e' = 1{,}5 \text{ cm}$$

Importance relative des collisions sur les neutres et coulombiennes :

$$\frac{m_i \nu_{in}}{m_e \nu_{ei}} = 36$$

$$\frac{m_e \nu_{en}}{m_e \nu_{ei}} = 8.10^{-3}$$

on a donc les inégalités : $\frac{m_e \nu_{en}}{m_e \nu_{ei}} << 1 << \frac{m_i \nu_{in}}{m_e \nu_{ei}}$

Valeurs du champ magnétique pour lesquelles les électrons sont moins mobiles que les ions :

- en négligeant les collisions coulombiennes -

$\gamma B^2 = 1$ avec $\gamma = \mu_e \mu_i = 6.10^7$

pour B = 1,3 Gauss

- en tenant compte des collisions coulombiennes -

$\gamma B^2 = 1$ avec $\gamma = \mu_e' \mu_i = \frac{e}{m_e(\nu_{en} + \nu_{ei})} \mu_i = 4{,}7.10^5$

pour B = 15 Gauss

APPENDICE 1

CHAMP PRODUIT PAR DES AIMANTS CYLINDRIQUES DISPOSES PARALLELEMENT AUX GENERATRICES D'UN CYLINDRE

2 m aimants de longueur infinie et de rayon a sont disposés suivant des génératrices d'un cylindre de rayon R_0 (voir figure II.5).

Calcul du potentiel scalaire

Le potentiel scalaire en M(r,φ) s'écrit :

$$V(M) = 2\pi J a^2 \sum_{p=0}^{2m-1} (-1)^p \frac{\sin \psi_p}{r_p}$$

avec : $r_p^2 = R_0^2 + r^2 - 2 R_0 r \cos\left(p\frac{\pi}{m} - \varphi\right)$

$\sin\psi_p$ s'exprime par : $r^2 = R_0^2 + r_p^2 - 2 R_0 r_p \sin\psi_p$

donc $$\sin\psi_p = \frac{r_p^2 + R_0^2 - r^2}{2 R_0 r_p}$$

et $$\frac{\sin\psi_p}{r_p} = \frac{1}{2R_0} + \frac{R_0^2 - r^2}{2 R_0 r_p^2}$$

$$V(M) = 2\pi J a^2 \left[\sum_{p=0}^{2m-1} \frac{(-1)^p}{2R_0} + \sum_{p=0}^{2m-1} (-1)^p \frac{R_0^2 - r^2}{2 R_0 r_p^2} \right]$$

Le premier terme est nul.

Il reste donc $$V(M) = 2\pi J a^2 \sum_{p=0}^{2m-1} (-1)^p \frac{R_0^2 - r^2}{2R_0\left[R_0^2 + r^2 - 2R_0 r \cos\left(p\frac{\pi}{m} - \varphi\right)\right]}$$

ou : $$V(M) = 2\pi J a^2 \frac{R_0^2 - r^2}{4R_0^2 r} F(M)$$

où l'on a posé $$F(M) = \sum_{p=0}^{2m-1} \frac{(-1)^p}{\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{r} + \frac{r}{R_0}\right) - \cos\left(p\frac{\pi}{m} - \varphi\right)}$$

En séparant dans F(M) les termes positifs (p = 2k) et les termes négatifs (p = 2k + 1) :

$$F(M) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{r} + \frac{r}{R_0}\right) - \cos\left(2k\frac{\pi}{m} - \varphi\right)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{r} + \frac{r}{R_0}\right) - \cos\left(2k\frac{\pi}{m} - \varphi + \frac{\pi}{m}\right)}$$

En utilisant le développement

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\mathrm{Ch}\,z - \cos\left(2k\frac{\pi}{m} + \varphi\right)} = \frac{m}{\mathrm{Ch}\,mz - \cos m\varphi} \frac{\mathrm{Sh}\,mz}{\mathrm{Sh}\,z}$$

on est amené à définir z par :

$$\mathrm{Ch}\,z = \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{r} + \frac{r}{R_0}\right)$$

et $$\mathrm{Sh}\,z = \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{r} - \frac{r}{R_0}\right)$$

c'est à dire $z = -\operatorname{Log}\frac{r}{R_0}$

F(M) s'écrit alors :

$$F(M) = \frac{m}{\operatorname{Ch} mz - \cos m\varphi}\ \frac{\operatorname{Sh} mz}{\operatorname{Sh} z} - \frac{m}{\operatorname{Ch} mz - \cos m\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right)}\ \frac{\operatorname{Sh} mz}{\operatorname{Sh} z}$$

$$F(M) = m\,\frac{\operatorname{Sh} mz}{\operatorname{Sh} z}\left[\frac{1}{\operatorname{Ch} mz - \cos m\varphi} - \frac{1}{\operatorname{Ch} mz + \cos m\varphi}\right]$$

$$F(M) = \frac{2m}{\operatorname{Sh} z}\ \frac{\operatorname{Sh} mz\ \cos m\varphi}{\operatorname{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

et $$V(M) = \frac{2\pi J a^2}{4R_0}\left(\frac{R_0}{r} - \frac{r}{R_0}\right) F(M)$$

s'écrit : $$V(M) = \frac{2\pi J a^2}{R_0}\ m\ \frac{\operatorname{Sh} mz\ \cos m\varphi}{\operatorname{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

Composantes du champ magnétique

Le champ magnétique $\vec{B} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V$ a pour composantes :

$$B_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Si l'on pose $\rho = \frac{r}{R_0}$

$$B_r = -\frac{1}{R_0}\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{R_0 \rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$\vec{B}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{B} = B_0 \vec{b}$

avec $$B_0 = \frac{m^2 2\pi J a^2}{R_0^2}$$

et $\vec{b}$ est le vecteur de composantes :

$$b_r = -\frac{1}{m}\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mu}{\partial (mz)}$$

$$b_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mu}{\partial (m\varphi)}$$

où $$\mu(mz, m\varphi) = \frac{\mathrm{Sh}\, mz \cos m\varphi}{\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

ce qui donne $$b_r = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{Ch}\, mz \cos m\varphi \,\frac{\mathrm{Sh}^2 mz - \sin^2 m\varphi}{(\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2}$$

$$b_\varphi = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{Sh}\, mz \sin m\varphi \,\frac{\mathrm{Ch}^2 mz + \cos^2 m\varphi}{(\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2}$$

Potentiel vecteur

Les composantes de $\vec{b}$ peuvent aussi s'écrire :

$$b_r = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial(m\varphi)}$$

$$b_\varphi = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial(mz)}$$

La fonction $\lambda(mz, m\varphi)$ se calcule donc par :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial(m\varphi)} = \mathrm{Ch}\,mz\,.\cos m\varphi\,\frac{\mathrm{Sh}^2 mz - \sin^2 m\varphi}{(\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2} \qquad (1)$$

et

$$\frac{\partial\lambda}{\partial(mz)} = -\,\mathrm{Sh}\,mz\,.\,\sin m\varphi\,\frac{\mathrm{Ch}^2 mz + \cos^2 m\varphi}{(\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2} \qquad (2)$$

Si l'on remarque que :

$$\cos m\varphi\,.\,\frac{\mathrm{Sh}^2 mz - \sin^2 m\varphi}{(\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2} = \frac{\partial}{\partial(m\varphi)}\left[\frac{\sin m\varphi}{\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}\right]$$

on peut chercher λ sous la forme :

$$\lambda(mz, m\varphi) = \frac{\mathrm{Ch}\,mz\,.\,\sin m\varphi}{\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi} + f(mz)$$

où $f(mz)$ est déterminé par l'équation (2).

Cette condition amène à $f'(mz) = 0$; donc $f(mz)$ est une constante, que l'on choisira nulle ; par conséquent :

$$\lambda(mz, m\varphi) = \frac{\mathrm{Ch}\, mz \cdot \sin m\varphi}{\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

Expression de b^2 en fonction de λ et μ

b^2 se calcule en fonction de z et φ par

$$b^2 = b_r^2 + b_\varphi^2$$

$$b^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\mathrm{Ch}^2 mz - \sin^2 m\varphi}{(\mathrm{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi)^2}$$

Des expressions de λ et μ on tire :

$$\mathrm{Ch}^2 mz = \frac{1}{2(\lambda^2+\mu^2)} \left[\lambda^2 + \mu^2 + 1 + \sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2 + 4\mu^2} \right]$$

$$\mathrm{Sh}^2 mz = \frac{1}{2(\lambda^2+\mu^2)} \left[1 - \lambda^2 - \mu^2 + \sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2 + 4\mu^2} \right]$$

$$\cos^2 m\varphi = \frac{1}{2(\lambda^2+\mu^2)} \left[\lambda^2 + \mu^2 - 1 + \sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2 + 4\mu^2} \right]$$

$$\sin^2 m\varphi = \frac{1}{2(\lambda^2+\mu^2)} \left[\lambda^2 + \mu^2 + 1 - \sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2 + 4\mu^2} \right]$$

b^2 peut alors s'écrire :

$$b^2 = \frac{1}{\rho^2}(\lambda^2+\mu^2)\sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2+4\mu^2}$$

où $\rho = e^{-\zeta}$ s'exprime en fonction de λ et μ par :

$$\rho = Ch\left[\frac{1}{m}\,Arg\,Ch\,(Ch\,m\zeta)\right] - Sh\left[\frac{1}{m}\,Arg\,Sh\,(Sh\,m\zeta)\right]$$

Equation d'un cercle de rayon R en coordonnées λ et μ

Un cercle de rayon R a pour équation $r = R$, ou encore

$\zeta = \zeta_0$, si l'on pose $\zeta_0 = -\,Log\,\frac{R}{R_0}$

L'équation de ce cercle en coordonnées λ et μ est :

$$\frac{1}{2(\lambda^2+\mu^2)}\left[\lambda^2+\mu^2+1+\sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2+4\mu^2}\,\right] = Ch^2\,m\zeta_0$$

dans la suite on posera $Ch\,m\zeta_0 = \frac{1}{H}$

Si l'on pose $\lambda^2+\mu^2 = \xi^2$

et $\lambda = \xi\cos\psi$

$\mu = \xi\sin\psi$

l'équation du cercle de rayon R s'écrit

$$\xi^2 = H^2 \cos^2\psi + \frac{H^2}{1-H^2} \sin^2\psi$$

Cette expression permet une construction géométrique du cercle de rayon R .

Il faut cependant remarquer que H devient très petit devant 1 dès que γ_0 devient égal à 1/m, ou encore dès que R devient inférieur à $R_0 e^{-1/m}$.

Donc dès que R devient inférieur à $R_0 e^{-1/m}$, l'équation du cercle de rayon R se réduit à :

$\lambda^2 + \mu^2 = H^2$: c'est aussi un cercle dans le plan λ, μ, de rayon $H = \frac{1}{Ch m\gamma_0}$.

APPENDICE 2

CHAMP PRODUIT PAR DES FILS DISPOSES SUIVANT LES GENERATRICES D'UN CYLINDRE ET PARCOURUS PAR DES COURANTS ALTERNES

2 m fils sont disposés suivant les génératrices d'un cylindre de résolution de rayon R_0 (voir figure II.8) et sont parcourus par des courants d'intensité $\pm I$.

Calcul du potentiel vecteur

Le potentiel vecteur créé au point M en coordonnées r et φ par l'ensemble des fils est :

$$A_z(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{p=0}^{2m-1} (-1)^p \operatorname{Log} r_p$$

si l'on exprime r_p de la façon suivante :

$$r_p^2 = R_0^2 + r^2 - 2rR_0 \cos\left(\frac{p\pi}{m} - \varphi\right)$$

on a à calculer

$$S = \sum_{p=0}^{2m-1} (-1)^p \operatorname{Log}\left[R_0^2 + r^2 - 2 r R_0 \cos\left(\frac{p\pi}{m} - \varphi\right)\right]$$

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{Log}\left[R_0^2 + r^2 - 2R_0 r \cos\left(2k\frac{\pi}{m} - \varphi\right)\right] - \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{Log}\left[R_0^2 + r^2 - 2R_0 r \cos\left(2k\frac{\pi}{m} - \varphi + \frac{\pi}{m}\right)\right]$$

ou encore :

$$S = \operatorname{Log} \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \left[\frac{R_0^2 + r^2}{2R_0 r} - \cos\left(2k\frac{\pi}{m} - \varphi\right)\right]}{\prod_{k=0}^{m-1} \left[\frac{R_0^2 + r^2}{2R_0 r} - \cos\left(2k\frac{\pi}{m} - \left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right)\right)\right]}$$

En utilisant le développement :

$$\prod_{k=0}^{m-1} \left[\mathrm{Ch}\,y - \cos\left(x + 2k\frac{\pi}{m}\right)\right] = 2^{1-m}\left(\mathrm{Ch}\,my - \cos mx\right)$$

et si l'on pose $$\frac{R_0^2 + r^2}{2R_0 r} = \mathrm{Ch}\,z$$

c'est à dire $$z = -\mathrm{Log}\frac{r}{R_0}$$

S peut s'écrire :

$$S = \mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{Ch}\,mz - \cos m\varphi}{\mathrm{Ch}\,mz + \cos m\varphi}$$

ou encore :

$$S = -2\,\mathrm{Arg\,Th}\,\frac{\cos m\varphi}{\mathrm{Ch}\,mz}$$

Le potentiel vecteur s'écrit donc

$$A_z(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\mathrm{Arg\,Th}\,\frac{\cos m\varphi}{\mathrm{Ch}\,mz}$$

Coordonnées du champ $\vec{B}$

$\vec{B}$ a pour composantes :

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

ou encore : $$B_r = \frac{m}{R_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial(m\varphi)}$$

$$B_\varphi = \frac{m}{R_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial(mz)}$$

Si l'on pose $\vec{B} = B_0 \vec{b}$, avec $B_0 = \frac{m \mu_0 I}{2\pi R_0}$

on peut écrire les composantes de $\vec{b}$ sous la forme

$$b_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial(m\varphi)}$$

$$b_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial(mz)}$$

avec $$\lambda(mz, m\varphi) = \text{Arg Th} \frac{\cos m\varphi}{\text{Ch } mz}$$

Les composantes de $\vec{b}$ s'écrivent :

$$b_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\sin m\varphi \cdot \text{Ch } mz}{\text{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

$$b_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\cos m\varphi \cdot \text{Sh } mz}{\text{Ch}^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

Le carré du module de $\vec{b}$

$$b^2 = b_r^2 + b_\varphi^2$$

s'écrit : $$b^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{Ch^2 m z - \cos^2 m\varphi}$$

(on rappelle que $\rho = \frac{r}{R_0}$ et $z = -\text{Log}\,\rho$)

Expression du potentiel scalaire

On peut aussi calculer les composantes de $\vec{b}$ par :

$$b_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial (mz)}$$

$$b_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial (m\varphi)}$$

μ est donc défini par le système :

$$\frac{\partial \mu}{\partial (mz)} = -\frac{\sin m\varphi \cdot Ch\, mz}{Ch^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial (m\varphi)} = \frac{\cos m\varphi \cdot Sh\, mz}{Ch^2 mz - \cos^2 m\varphi}$$

on vérifie aisément que $$\mu(mz, m\varphi) = -\text{Arc tg}\,\frac{Sh\, mz}{\sin m\varphi} + C$$

est solution de ce système. On choisit la constante C égale à $\pi/2$, de façon qu'au centre du dispositif (en $\rho = 0$), on ait $\mu = 0$.

On a donc : $$\mu(mz, m\varphi) = \text{Arc tg}\,\frac{\sin m\varphi}{Sh\, mz}$$

Expression de b^2 en fonction de λ et μ

On peut calculer facilement sin $m\varphi$, cos $m\varphi$, Chmz et Shmz en fonction de λ et μ , à partir des relations :

$$Th\,\lambda = \frac{\cos m\varphi}{Ch\,mz}$$

$$tg\,\mu = \frac{\sin m\varphi}{Sh\,mz}$$

on arrive à :

$$\cos^2 m\varphi = \frac{Th^2\lambda}{\sin^2\mu + \cos^2\mu\, Th^2\lambda}$$

$$\sin^2 m\varphi = \frac{\sin^2\mu}{Sh^2\lambda + \sin^2\mu}$$

$$Ch^2 mz = \frac{1}{\sin^2\mu + \cos^2\mu\, Th^2\lambda}$$

$$Sh^2 mz = \frac{\cos^2\mu}{Sh^2\lambda + \sin^2\mu}$$

b^2 peut alors s'écrire :

$$b^2 = \frac{1}{\rho^2}\left(Sh^2\lambda + \sin^2\mu\right)$$

ρ s'exprime en fonction de λ et μ par :

$$\rho = e^{-z} = Ch\,z - Sh\,z$$

$$\rho = Ch\left[\frac{1}{m}\,Arg\,Ch\,(Chmz)\right] - Sh\left[\frac{1}{m}\,Arg\,Sh\,(Shmz)\right]$$

où Chmz et Shmz s'expriment en fonction de λ et μ.

Equation d'un cercle de rayon R en coordonnées λ et μ

Un cercle dont l'équation est $r = R$, ou encore

$$z = z_0 \text{, avec } z_0 = -\,Log\,\frac{R}{R_0}$$

a pour équation dans le plan λ , μ :

$$Ch^2 mz = Ch^2 mz_0$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{\sin^2\mu + \cos^2\mu\, Th^2\lambda} = Ch^2 mz_0$$

si l'on pose $\frac{1}{H} = Chmz_0$, cette équation devient :

$$\sin^2\mu + \cos^2\mu\, Th^2\lambda = H^2$$

Dès que mz_0 devient plus grand que 1, c'est à dire dès que R devient inférieur à $R_0 e^{-1/m}$, H devient très petit devant 1, et l'équation du cercle de rayon R_0 se simplifie en :

$$\lambda^2 + \mu^2 = H^2$$

un cercle de rayon R inférieur à $R_0 e^{-1/m}$ a pour image dans le plan λ , μ un cercle de rayon H, avec $H = 1/Chmz_0$.

APPENDICE 3

CALCUL DES MOBILITES ET DES COEFFICIENTS DE DIFFUSION EN CHAMP MAGNETIQUE

1 - Sans collisions coulombiennes

Les équations donnant $\vec{v_e}$ et $\vec{v_i}$ en fonction de $\vec{\nabla n}$ et $\vec{E}$ sont découplées :

$$-kT_e \vec{\nabla n} - ne\vec{E} - ne\vec{v_e} \times \vec{B} - nm_e \nu_{en} \vec{v_e} = 0 \qquad (1)$$

$$-kT_i \vec{\nabla n} + ne\vec{E} + ne\vec{v_i} \times \vec{B} - nm_i \nu_{in} \vec{v_i} = 0 \qquad (2)$$

En projetant (1) sur les axes $\vec{e}_{//}$, $\vec{e}_{\perp}$, $\vec{e}_z$, on arrive à :

$$-kT_e \nabla_{//} n - ne E_{//} \qquad - nm_e \nu_{en} v_{e//} = 0$$

$$-kT_e \nabla_{\perp} n - ne E_{\perp} - neB v_{ez} - nm_e \nu_{en} v_{e\perp} = 0$$

$$neB v_{e\perp} - nm_e \nu_{en} v_{ez} = 0$$

où l'on a tenu compte de $\nabla_z n = 0$

$E_z = 0$

on arrive alors à $n v_{e//} = - D_{e//} \nabla_{//} n - n \mu_{e//} E_{//}$

$$n v_{e\perp} = - D_{e\perp} \nabla_{\perp} n - n \mu_{e\perp} E_{\perp}$$

$$n v_{ez} = - D_{e\perp z} \nabla_{\perp} n - n \mu_{e\perp z} E_{\perp}$$

avec $$\mu_{e/\!/} = \frac{e}{m_e \nu_{en}}$$

$$D_{e/\!/} = \frac{k T_e}{m_e \nu_{en}}$$

Les coefficients parallèles au champ magnétique sont les mêmes qu'en champ nul

$$\mu_{e\perp} = \frac{\mu_{e/\!/}}{1 + \omega_{be}^2 / \nu_{en}^2} \qquad \text{avec} \qquad \omega_{be} = \frac{e B}{m_e}$$

$$D_{e\perp} = \frac{D_{e/\!/}}{1 + \omega_{be}^2 / \nu_{en}^2}$$

$$\mu_{e\perp z} = \frac{\omega_{be}}{\nu_{en}} \mu_{e\perp}$$

$$D_{e\perp z} = \frac{\omega_{be}}{\nu_{en}} D_{e\perp}$$

L'équation (2) donnant v_i donne, en projection sur les axes (avec $\nabla_z n = E_z = 0$) :

$$-k T_i \nabla_{/\!/} n + n e E_{/\!/} - n m_i \nu_{in} v_{i/\!/} = 0$$

$$-k T_i \nabla_{\perp} n + n e E_{\perp} + n e B v_{iz} - n m_i \nu_{in} v_{i\perp} = 0$$

$$- n e B v_{i\perp} - n m_i \nu_{in} v_{iz} = 0$$

on arrive à $$n v_{i/\!/} = - D_{i/\!/} \nabla_{/\!/} n + n \mu_{i/\!/} E_{/\!/}$$

$$n v_{i\perp} = - D_{i\perp} \nabla_\perp n + n \mu_{i\perp} E_\perp$$

$$n v_{iz} = - D_{i\perp z} \nabla_\perp n + n \mu_{i\perp z} E_\perp$$

avec $D_{i/\!/} = \dfrac{k T_i}{m_i \nu_{in}}$ et $\mu_{i/\!/} = \dfrac{e}{m_i \nu_{in}}$

$$D_{i\perp} = \frac{D_{i/\!/}}{1 + \omega_{bi}^2 / \nu_{in}^2} \quad \text{et} \quad \mu_{i\perp} = \frac{\mu_{i/\!/}}{1 + \omega_{bi}^2 / \nu_{in}^2}$$

$$D_{i\perp z} = - \frac{\omega_{bi}}{\nu_{in}} D_{i\perp} \quad \text{et} \quad \mu_{i\perp z} = - \frac{\omega_{bi}}{\nu_{in}} \mu_{i\perp} \quad \text{avec} \quad \omega_{bi} = \frac{e B}{m_i}$$

2 - En tenant compte des collisions coulombiennes

Posons $\vec{C_e} = \left(- k T_e \vec{\nabla} n - n e \vec{E} \right) / n m_e \nu_{ei}$

$$\vec{C_i} = \left(- k T_i \vec{\nabla} n + n e \vec{E} \right) / n m_e \nu_{ei}$$

les équations de transport de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$n m_e \nu_{ei} \vec{C_e} - n e \vec{v_e} \times \vec{B} - n m_e \nu_{en} \vec{v_e} - n m_e \nu_{ei} \left(\vec{v_e} - \vec{v_i} \right) = 0$$

$$n m_e \nu_{ei} \vec{C_i} + n e \vec{v_i} \times \vec{B} - n m_i \nu_{in} \vec{v_i} + n m_e \nu_{ei} \left(\vec{v_e} - \vec{v_i} \right) = 0$$

en posant $\vec{B} = B \vec{e}_{/\!/}$

$$\nu_e = \frac{\nu_{en}}{\nu_{ei}}$$

$$\nu_i = \frac{\nu_{in}}{\nu_{ei}} \frac{m_i}{m_e}$$

$$\Omega = \frac{e\,B}{m_e \nu_{ei}}$$

ces équations se mettent sous la forme :

$$\vec{C_e} - \Omega\, \vec{v_e} \times \vec{e_{//}} - (\vec{v_e} - \vec{v_i}) - \nu_e \vec{v_e} = 0$$

$$\vec{C_i} + \Omega\, \vec{v_i} \times \vec{e_{//}} + (\vec{v_e} - \vec{v_i}) + \nu_i \vec{v_i} = 0$$

soit, en projection sur les axes $\vec{e_{//}}$, $\vec{e_\perp}$, $\vec{e_z}$, en se souvenant que $C_{ez} = C_{iz} = 0$

$$C_{e//} + v_{i//} - (1 + \nu_e)\, v_{e//} = 0 \qquad (1)$$

$$C_{e\perp} + v_{i\perp} - (1 + \nu_e)\, v_{e\perp} - \Omega\, v_{ez} = 0 \qquad (2)$$

$$v_{iz} - (1 + \nu_e)\, v_{ez} + \Omega\, v_{e\perp} = 0 \qquad (3)$$

$$C_{i//} + v_{e//} - (1 + \nu_i)\, v_{i//} = 0 \qquad (4)$$

$$C_{i\perp} + v_{e\perp} - (1 + \nu_i)\, v_{i\perp} + \Omega\, v_{iz} = 0 \qquad (5)$$

$$v_{ez} - (1 + \nu_i)\, v_{iz} - \Omega\, v_{i\perp} = 0 \qquad (6)$$

Les mouvements parallèles et perpendiculaires aux lignes de champ se découplent, mais $\vec{v_e}$ et $\vec{v_i}$ sont couplées.

- Mouvement parallèle aux lignes de champ :

Les équations (1) et (4) permettent de calculer $v_{e//}$ et $v_{i//}$:

$$v_{i//} = \frac{C_{e//} + (1+\nu_e) C_{i//}}{\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i} = \frac{1}{n m_e \nu_{ei} (\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i)} \left[-\left(kT_e + (1+\nu_e) kT_i\right) \nabla_{//} n + n e \nu_e E_{//} \right]$$

en identifiant $n v_{i//}$ à $- D_{i//} \nabla_{//} n + n \mu_{i//} E_{//}$

on trouve $$D_{i//} = \frac{kT_e + (1+\nu_e) kT_i}{m_e (\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i) \nu_{ei}}$$

$$\mu_{i//} = \frac{e}{m_e \left(\nu_i + 1 + \frac{\nu_i}{\nu_e}\right) \nu_{ei}}$$

de même :

$$v_{e//} = \frac{(1+\nu_i) C_{e//} + C_{i//}}{\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i} = \frac{-\left((1+\nu_i) kT_e + kT_i\right) \nabla_{//} n - n e \nu_i E_{//}}{n m_e (\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i) \nu_{ei}}$$

avec $n v_{e//} = - D_{e//} \nabla_{//} n - n \mu_{e//} E_{//}$

on trouve : $$D_{e//} = \frac{(1+\nu_i) kT_e + kT_i}{m_e (\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i) \nu_{ei}}$$

$$\mu_{e//} = \frac{e}{m_e \left(\nu_e + 1 + \frac{\nu_e}{\nu_i}\right) \nu_{ei}}$$

- Mouvement perpendiculaire aux lignes de champ :

Les équations (2), (3), (5), (6) forment un système de 4 équations à 4 inconnues ($v_{e\perp}$, v_{ez}, $v_{i\perp}$, v_{iz}) :

$$-(1+\nu_e)\,v_{e\perp} - \Omega\, v_{ez} + v_{i\perp} = 0$$

$$\Omega\, v_{e\perp} - (1+\nu_e)\,v_{ez} + v_{iz} = 0$$

$$v_{e\perp} - (1+\nu_i)\,v_{i\perp} + \Omega\, v_{iz} = 0$$

$$v_{ez} - \Omega\, v_{i\perp} - (1+\nu_i)\,v_{iz} = 0$$

$$n v_{e\perp} = - D_{e\perp}\,\nabla_\perp n - n\,\mu_{e\perp}\,E_\perp$$

donne :
$$D_{e\perp} = \frac{1}{\Delta\, m_e \nu_{ei}}\left[kT_i\left(\Omega^2 + \nu_e + \nu_i + \nu_e\nu_i\right) + kT_e\left(\Omega^2(1+\nu_e) + (1+\nu_i)(\nu_e+\nu_i+\nu_e\nu_i)\right)\right]$$

$$\mu_{e\perp} = \frac{1}{\Delta\, m_e \nu_{ei}}\left[\nu_e\,\Omega^2 + \nu_i\left(\nu_e + \nu_i + \nu_e\nu_i\right)\right]$$

$$n v_{ez} = - D_{e\perp z}\,\nabla_\perp n - n\,\mu_{e\perp z}\,E_\perp$$

donne :
$$D_{e\perp z} = \frac{\Omega}{\Delta\, m_e \nu_{ei}}\left[kT_i\left(\nu_i - \nu_e\right) + kT_e\left(\Omega^2 + \nu_i^2 + 2\nu_i\right)\right]$$

$$\mu_{e\perp z} = \frac{e\,\Omega}{\Delta\, m_e \nu_{ei}}\left[\Omega^2 + \nu_i^2 + \nu_i + \nu_e\right]$$

$$n v_{i\perp} = - D_{i\perp}\,\nabla_\perp n + n\,\mu_{i\perp}\,E_\perp$$ donne :

$$D_{i\perp} = \frac{1}{\Delta\, m_e \nu_{ei}}\left[kT_i\left(\Omega^2(1+\nu_i) + (1+\nu_e)(\nu_e+\nu_i+\nu_e\nu_i)\right) + kT_e\left(\Omega^2 + \nu_e + \nu_i + \nu_e\nu_i\right)\right]$$

$$\mu_{i\perp} = \frac{e}{\Delta\, m_e \nu_{ei}}\left[\nu_i\,\Omega^2 + \nu_e\left(\nu_e + \nu_i + \nu_e\nu_i\right)\right]$$

enfin $n v_{i\perp z} = - D_{i\perp z} \nabla_\perp n + n \mu_{i\perp z} E_\perp$ donne :

$$D_{i\perp z} = \frac{\Omega}{\Delta m_e \nu_{ei}} \left[kT_e (\nu_i - \nu_e) - kT_i (\Omega^2 + \nu_e^2 + 2\nu_e) \right]$$

$$\mu_{i\perp z} = \frac{- e \Omega}{\Delta m_e \nu_{ei}} \left[\Omega^2 + \nu_e^2 + \nu_e + \nu_i \right]$$

dans toutes ces expressions on a posé $\Delta = (\Omega^2 + \nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i)^2 + \Omega^2 (\nu_i - \nu_e)^2$

3 - Comparaison des coefficients de transport électroniques et ioniques

Dans tous les coefficients interviennent les paramètres :

$$\nu_e = \frac{\nu_{en}}{\nu_{ei}} \approx 10^{-2}$$

et $$\nu_i = \frac{m_i}{m_e} \frac{\nu_{in}}{\nu_{ei}} \approx 10^{+2}$$

on a donc $\nu_i \gg \nu_e$, $\nu_i \gg 1$

- Coefficients de transport parallèles aux lignes de champ :

$$\frac{\mu_{e//}}{\mu_{i//}} = \frac{\nu_i}{\nu_e} \gg 1$$ donc, de même qu'en l'absence de

collisions coulombiennes $\mu_{e//} \gg \mu_{i//}$

de même $$\frac{D_{e//}}{D_{i//}} = \frac{(1+\nu_i)kT_e + kT_i}{kT_e + (1+\nu_e)kT_i}$$

T_e et T_i étant du même ordre de grandeur, et puisque $\nu_i \gg \nu_e$, 1

$$\frac{D_{e//}}{D_{i//}} \approx \nu_i$$ ou encore : $D_{e//} \gg D_{i//}$

Parallèlement aux lignes de champ, les coefficients de transport électroniques sont beaucoup plus grands que les coefficients de transport ioniques.

- Coefficients de transport perpendiculaires aux lignes de champ :

$$\frac{\mu_{e\perp}}{\mu_{i\perp}} = \frac{\nu_e \Omega^2 + \nu_i (\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i)}{\nu_i \Omega^2 + \nu_e (\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i)}$$

. en champ magnétique faible ($\Omega^2 \approx 0$) $\quad \frac{\mu_{e\perp}}{\mu_{i\perp}} \approx \frac{\nu_i}{\nu_e}$: on retrouve la même relation entre les mobilités électronique et ionique qu parallèlement au champ.

. en champ magnétique fort (Ω^2 très grand) $\quad \frac{\mu_{e\perp}}{\mu_{i\perp}} \approx \frac{\nu_e}{\nu_i} \ll 1$

donc en champ magnétique fort les ions sont beaucoup plus mobiles que les électrons perpendiculairement aux lignes de champ.

Calculons la valeur du champ B pour laquelle $\mu_{e\perp} = \mu_{i\perp}$: elle est donnée par :

$$\nu_e \Omega^2 + \nu_i (\Omega^2 + \nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i) = \nu_i \Omega^2 + \nu_e (\Omega^2 + \nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i)$$

ou encore $\quad \Omega^2 = \nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i$

ce qui peut s'écrire $\gamma B^2 = 1$, avec

$$\gamma = \frac{e^2}{m_e^2 \nu_{ei}^2 (\nu_e + \nu_i + \nu_e \nu_i)}$$

en se souvenant que $\nu_e \ll \nu_i$:

$$\gamma \approx \frac{e^2}{m_e^2 \nu_{ei}^2 \nu_i (1 + \nu_e)} = \frac{e^2}{m_e m_i \nu_{in} (\nu_{ei} + \nu_{en})}$$

La comparaison des coefficients de diffusion se fait de la même manière :

$$\frac{D_{e\perp}}{D_{i\perp}}$$

devient plus petit que 1 quand γB^2 devient supérieur à :

$$\frac{\nu_i \frac{T_e}{T_i} - \nu_e}{\nu_i - \nu_e \frac{T_e}{T_i}} = \frac{m_i \nu_{in} T_e - m_e \nu_{en} T_i}{m_i \nu_{in} T_i - m_e \nu_{en} T_e}$$

ce qui peut s'écrire, avec $m_i \nu_{in} \gg m_e \nu_{en}$: $\gamma B^2 > \frac{T_e}{T_i}$

En résumé :

- parallèlement aux lignes de champ les coefficients de transport sont les mêmes qu'en l'absence de champ magnétique : les coefficients électroniques sont beaucoup plus grands que les coefficients ioniques ;

- perpendiculairement aux lignes de champ : la mobilité ionique devient supérieure à la mobilité électronique dès que $\gamma B^2 > 1$,

avec $$\gamma = \frac{e^2}{m_e m_i \left[\nu_{ei} + \nu_{en} \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{\nu_{ei}}{\nu_{in}} \right) \right] \nu_{in}}$$

le coefficient de diffusion des ions devient supérieur à celui des électrons dès que $\gamma B^2 > \frac{T_e}{T_i}$;

On a aussi besoin de savoir pour quelles valeurs de B $D_{e\perp} - \beta D_{i\perp}$ reste positif. On trouve que $D_{e\perp}$ reste supérieur à $\beta D_{i\perp}$ tant que :

$$\gamma B^2 < \frac{T_e(\nu_i - \beta + 1) - T_i(\beta\nu_e + \beta - 1)}{T_i(\beta\nu_i + \beta - 1) - T_e(\nu_e - \beta + 1)}$$

avec $\nu_i \gg \nu_e$, $\nu_i \gg 1$, cette inégalité peut s'écrire :

$$\beta\gamma B^2 < \frac{T_e}{T_i}$$

4 - Calcul des coefficients de diffusion $D_{//}$ et $D_{\perp}$

Ils sont définis par

$$D_{//} = \frac{\mu_{e//} D_{i//} + \mu_{i//} D_{e//}}{\mu_{e//} + \beta \mu_{i//}}$$

$$D_{\perp} = \frac{\mu_{e\perp} D_{i\perp} + \mu_{i\perp} D_{e\perp}}{\mu_{e\perp} + \beta \mu_{i\perp}}$$

En reportant les valeurs des coefficients calculés au (2), on arrive à :

$$D_{//} = \frac{kT_e + kT_i}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}}$$

et

$$D_{\perp} = \frac{D_{//}}{1 + \frac{\beta m_i \nu_{in} + m_e \nu_{en}}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}} \gamma B^2}$$

5 - Champ électrique

$\vec{E}_{/\!/}$ et $\vec{E}_{\perp}$ sont reliés au gradient de densité par :

$$\vec{E}_{/\!/} = - \frac{D_{e/\!/} - \beta D_{i/\!/}}{\mu_{e/\!/} + \beta \mu_{i/\!/}} \cdot \frac{\vec{\nabla}_{/\!/} n}{n}$$

$$\vec{E}_{\perp} = - \frac{D_{e\perp} - \beta D_{i\perp}}{\mu_{e\perp} + \beta \mu_{i\perp}} \cdot \frac{\vec{\nabla}_{\perp} n}{n}$$

$\vec{E}_{/\!/}$ peut s'écrire : $\vec{E}_{/\!/} = - \frac{k T_D}{e} \frac{\vec{\nabla}_{/\!/} n}{n}$

avec $$T_D = \frac{m_i \nu_{in} - (\beta - 1) m_e \nu_{en}}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}} T_e - \frac{\beta m_e \nu_{en} + (\beta - 1) m_e \nu_{ei}}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}} T_i$$

avec toujours $m_i \nu_{in} \gg m_e \nu_{en}$, $m_i \nu_{in} \gg m_e \nu_{ei}$

$$T_D \approx T_e$$

$\vec{E}_{\perp}$ peut s'écrire $$\vec{E}_{\perp} = - \frac{1}{1 + g B^2} \left[\frac{k T_D'}{e} - \beta \gamma B^2 \frac{k T_D''}{e} \right] \frac{\vec{\nabla}_{\perp} n}{n}$$

avec $$g = \frac{m_i \nu_{in} \beta - m_e \nu_{en}}{m_i \nu_{in} + m_e \nu_{en} \beta} \gamma \approx \beta \gamma$$

et :

$$T'_D = \frac{m_i \nu_{in} - (\beta-1) m_e \nu_{ei}}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}} T_e - \frac{\beta m_e \nu_{en} + (\beta-1) m_e \nu_{ei}}{m_i \nu_{in} + \beta m_e \nu_{en}} T_i$$

$$T''_D = \frac{(\beta-1) m_e \nu_{ei} - m_e \nu_{en}}{\beta m_i \nu_{in} + \beta^2 m_e \nu_{en}} T_e + \frac{\beta m_i \nu_{in} + (\beta-1) m_e \nu_{ei}}{\beta m_i \nu_{in} + \beta^2 m_e \nu_{en}} T_i$$

on a donc :

$$T'_D \approx T_e$$

$$T''_D \approx T_i$$

APPENDICE 4

INFLUENCE DU COURANT DE CONDUCTION SUR LES PROFILS DE DENSITE ET DE POTENTIEL DANS UNE DECHARGE SANS CHAMP MAGNETIQUE

On considère une décharge cylindrique classique (sans champ magnétique) dans laquelle les taux de création des électrons (α_e) et des ions (α_i) sont uniformes.

L'évacuation des charges créées se fait grâce à l'existence dans le plasma d'un gradient de densité $\vec{\nabla}n$ et d'un champ électrique $\vec{E}$.

Etant donné la symétrie du problème, $\vec{E}$ et $\vec{\nabla}n$ sont radiaux. Il en est de même des flux $\vec{\Gamma}_e$ et $\vec{\Gamma}_i$ donnés par

$$\vec{\Gamma}_e = - D_e \vec{\nabla}n - n\mu_e \vec{E} \qquad (1)$$

$$\vec{\Gamma}_i = - D_i \vec{\nabla}n + n\mu_i \vec{E} \qquad (2)$$

de $\operatorname{div} \vec{\Gamma}_e = \alpha_e$ on tire $\vec{\Gamma}_e = \frac{\alpha_e}{2} r \vec{u}_r$

et $\operatorname{div} \vec{\Gamma}_i = \alpha_i$ donne $\vec{\Gamma}_i = \frac{\alpha_i}{2} r \vec{u}_r$

Les deux flux $\vec{\Gamma}_e$ et $\vec{\Gamma}_i$ sont colinéaires ; ils vérifient $\vec{\Gamma}_e = \beta \vec{\Gamma}_i$ où $\beta = \frac{\alpha_e}{\alpha_i}$ ne dépend pas de r.

On peut déterminer les profils de potentiel et de densité, en tirant $\vec{E}$ et $\vec{\nabla}n$ des équations (1) et (2). On trouve que

$$\nabla n = - \frac{\alpha_i}{2} r \frac{\beta\mu_i + \mu_e}{\mu_i D_e + \mu_e D_i}$$

et $$E = - \frac{D_e - \beta D_i}{\mu_e + \beta \mu_i} \frac{\nabla n}{n}$$

On peut simplifier ces expressions en se souvenant que $\mu_e \gg \mu_i$ et $D_e \gg D_i$

$$\nabla n \approx - \frac{\alpha_i}{2 D_i} r$$

$$E \approx - \frac{D_e}{\mu_e} \frac{\nabla n}{n} \approx \frac{k T_e}{e} \frac{\nabla n}{n}$$

Par conséquent les profils de densité et de potentiel ne dépendent que du taux de création des ions α_i. Ceci se comprend facilement : les profils de densité et de potentiel se chargent d'évacuer l'espèce la plus lente (ici : les ions). Une très petite modification de ces profils suffit à créer le flux de particules rapides (ici : d'électrons) nécessaire pour évacuer le courant de conduction.

Par conséquent, les valeurs de $\vec{\nabla n}$ et de $\vec{E}$ que l'on calcule dépendent peu de l'hypothèse que l'on pourrait faire sur $\vec{\Gamma}_e$ et $\vec{\Gamma}_i$ pour simplifier les calculs, du moment que pour l'espèce lente (les ions) la relation $\text{div}\, \vec{\Gamma}_i = \alpha_i$ est satisfaite. (Il est remarquable de constater que l'on peut calculer $\vec{E}$ et $\vec{\nabla n}$ en prenant $\vec{\Gamma}_e = 0$ et $\text{div}\, \vec{\Gamma}_i = \alpha_i$; on trouve les mêmes valeurs de $\vec{E}$ et $\vec{\nabla n}$ qu'en utilisant $\text{div}\, \vec{\Gamma}_e = \alpha_e$, du moment que l'on peut écrire que les coefficients de transport des ions sont négligeables devant ceux des électrons).

APPENDICE 5

PLAN DU PROGRAMME DE CALCUL DE LA DENSITE ET DU POTENTIEL

Paramètres :

Paramètres définissant la géométrie du champ :

- rayon des aimants (RAI)
- rayon du cylindre portant les centres des aimants ou les fils (RCA)
- rayon de la coque (RCC)
- nombre d'aimants ou de fils (2U)
- valeurs de B_0 (BOC)

Paramètres relatifs au plasma :

- mobilités électronique (OBE) et ionique (OBI)
- températures électronique (APL) et ionique (APR)

Choix du modèle :

- ION = 0 pour le modèle sans ionisation dans la région II ($\alpha = 0$)
- ION = 1 pour le modèle où α est uniforme dans le domaine accessible aux primaires

Energie des électrons primaires :

- VPRI = 50 * ION.

Calculs préliminaires :

1°) G = OBE * OBI * (BOC * * 2)

2°) Domaine accessible aux primaires :

Calcul de $\lambda_{max} \doteq 2 \frac{U}{R_0} \frac{m_e v_p}{e B_0}$

ANDX = (2.*U/(BOC*RCA))*(1.13E - 11*VPRI) * * 0.5

Calcul de I_{max}, défini par :

Int (ANDX) = (I_{max}-1)H

Résolution (Principe)

L'équation différentielle donnant la densité est :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \mu^2} + \frac{1}{1+Gb^2}\,\frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial n}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{1+Gb^2}\right) + \frac{A}{b^2} = 0$$

On résoud cette équation différentielle dans le plan (λ, μ) par différences finies, successivement avec un pas H = 0.050 puis un pas moitié H = 0.025. On calcule la densité réduite F(I,J) aux points $\lambda = (I-1)H$ et $\mu = (J-1)H$. Le nombre de points est de 800 dans la première itération, et de 3200 dans la seconde.

dans le modèle ION = 0 : $F = \frac{4}{m^2}\,\frac{n}{A}$

dans le modèle ION = 1 : $F = \frac{n}{A}$.

Premier pas

1) Approximation de la coque par des points (I,J) du quadrillage.

- Calcul de la valeur maximale de μ dans le domaine d'intégration :

$$\mu_{max} = \frac{1}{Sh\, m z_0} \quad \text{où} \quad Ch\, m z_0 = \left|\frac{R_c}{R_0}\right|^m + \left|\frac{R_0}{R_c}\right|^m$$

- Calcul de $J_{max} = Int\ (\frac{\mu max}{H} + 1)$

- Pour chaque $J < J_{max}$ on calcule la valeur $\lambda(J)$ de λ telle que le point $(\lambda = \lambda(J),\ \mu = (J-1)H)$ soit sur la coque. On calcule ensuite : $I(J) = Int\ (\lambda(J) + 0{,}5 + 1)$. J étant donné, I = I(J) est le point du quadrillage le plus proche de la coque.

Pour J donné, on calculera la densité F(I,J), I variant de 1 à M(J)= I(J)- 1.

2) Initialisation de la densité.

F(I,J) = 0, ceci pour tout couple (I,J) du plan d'intégration.

3) Calcul des pentes aux points de raccord entre les régions I et II (voir page 80).

au point (H,0) : $FEA = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=H,\mu=0} = -\frac{U^2}{4}\left(\frac{\partial \rho^2}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=H,\mu=0}$

au point (0,H) : $FEU = \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\lambda=0,\mu=H} = -\frac{U^2}{4}\left(\frac{\partial \rho^2}{\partial \mu}\right)_{\lambda=0,\mu=H}$

Ces pentes sont calculées pour calculer la densité aux points (H,0) et (0,H) :

$$F(H,0) = F(2H,0) - H \times FEA$$

$$F(0,H) = F(0,2H) - H \times FEU$$

Par conséquent pour améliorer la précision on utilisera pour FEA et FEU les demi sommes des pentes aux points H et 2H :

$$FEA = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}(H,0) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(2H,0)\right]$$

$$FEU = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,H) + \frac{\partial F}{\partial \mu}(0,2H)\right]$$

avec $$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,0) = -\frac{U}{2}\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)^{1/2}\right]^{-2/m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)^{1/2}}$$

et $$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,\mu) = -\frac{U}{2}\frac{1}{\mu^2}\left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu^2}+1\right)^{1/2}\right]^{-2/m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu^2}+1\right)^{1/2}}$$

4) Calcul des coefficients de l'équation aux différences finies.

Cette équation s'écrit :

$$S1\ F(I,J+1)+S1\ F(I,J-1)+(SA+SB)F(I+1,J)+(SA-SB)F(I-1,J)$$

$$-2(S1+SA)F(I,J)+T6 = 0$$

avec $S1 = 1/H^2$

$$SA = \frac{1}{H^2} \frac{1}{1+Gb^2}$$

$$SB = -\frac{1}{H} \frac{Gb}{1+Gb^2} \frac{\partial b}{\partial \lambda}$$

S1, SA et SB définissent des tableaux.

$T6 = \frac{ION}{b^2}$ dans la région accessible aux primaires ($I < I_{max}$)

$T6 = 0$ pour $I > I_{max}$.

b^2 s'exprime en fonction de λ et μ par :

$$b^2 = \frac{1}{\rho^2} \left(\lambda^2 + \ldots \right) \sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2 + 4\mu^2}$$

avec $$\rho = \left[\sqrt{A} + \sqrt{A-1} \right]^{-1/m}$$

$$A = \frac{1}{2(\lambda^2+\mu^2)} \left[\lambda^2 + \mu^2 + 1 + \sqrt{(\lambda^2+\mu^2-1)^2 + 4\mu^2} \right]$$

5) Calcul de F(I,J).

C'est ici qu'interviennent les conditions aux limites.

* points I = 1, J = 2 et I = 2, J = 1

dans le modèle ION = 0 : F(1,2) = F(2,1) = 1.

dans le modèle ION = 1 : F(1,2) = F(1,3) - FEU×H

F(2,1) = F(3,1) - FEA×H.

* points I = 1, J variant de 3 à J_{max}

$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$ s'écrit : $F(-H,\mu) = F(H,\mu)$

ou ecore : $F(0,J) = F(2,J)$

et F(1,J) se calcule par :

$$P = \frac{S1*F(1,J-1) + F(2,J)*2*SA + S1*F(1,J+1) + T6}{2*(S1+SA)}$$

F(1,J) = P

* points J = 1 , I variant de 3 à M(1)

$\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = 0$ s'écrit : $F(\lambda,-H) = F(\lambda,H)$

ou : $F(I,0) = F(I,2)$.

F(I,1) se calcule par :

$$P = \frac{2*S1*F(I,2) + (SA-SB)*F(I-1,1) + (SA+SB)*F(I+1,1) + T6}{2*(S1+SA)}$$

F(I,1) = P

* points $I \geqslant 2$ et $J \geqslant 2$ (J varie de 2 à J_{max} ; J étant donné I varie de 2 à M(J)) :

$$P = \frac{S1*F(I,J+1)+S1*F(I,J-1)+(SA+SB)*F(I+1,J)+(SA-SB)*F(I-I,J)+T6}{2*(SI+SA)}$$

F(I,J) = P.

Test : on itère jusqu'à ce que la somme des variations de F entre deux itérations soit inférieure à un paramètre donné (TEST).
Suivant les valeurs de G, TEST varie de 0,1 à 2 environ.

6) Calcul des pentes fournies par le calcul :

$$PT1 = \frac{F(2,1)-F(3,1)}{XC(2,1)-XC(3,1)} \qquad (\text{où } XC = \rho)$$

$$PT2 = \frac{F(1,2)-F(1,3)}{XC(1,2)-XC(1,3)}$$

il faut vérifier (dans le modèle ION = 0) que ces pentes sont égales ; dans le modèle ION = 1 il faut vérifier que F(1,2) et F(2,1) sont égales.

- Calcul de la densité au centre :

  - dans le modèle sans ionisation (ION = 0) :

```
DENC = XC(1,2)**2 -2.*XC(1,2)/(PT1*RCA)
```

  - dans le modèle ION = 1 :

```
DENC = XC(1,2)**2 +4.*F(1,2)*(RC**2)/(U**2)
```

- Calcul du champ B_{lim} à la limite de la région II :

$$B_{lim} = B_o \times b(1,2)$$

on calcule $G\,B_{lim}^2$, dont il faut vérifier qu'il reste petit devant 1.

7) Calcul du potentiel V :

On rappelle que $$\nabla_{/\!/} V = \frac{k T_e}{e} \cdot \frac{\nabla_{/\!/} n}{n}$$

et $$\nabla_{\perp} V = \frac{1}{1+Gb^2}\left[\frac{k T_e}{e} - Gb^2 \frac{k T_i}{e}\right] \frac{\nabla_{\perp} n}{n}$$

Les conditions aux limites sont :

$$V(1,2) = V(2,1) = 1.$$

* pour I = 1, J variant de 3 à J_{max} : on calcule V(1,J) (le long de la ligne de champ $\lambda = 0$) par :

$$V(1,J) = V(1,J-1) + \frac{kT_e}{e} \quad \frac{F(1,J+1)-F(1,J-1)}{2F(1,J)}$$

* pour J = 1, I variant de 3 à M(1) :

$$V(I,1) = V(I-1,1) + \left[\frac{kT_e}{e} - \frac{kT_i}{e} Gb^2 \right] \frac{1}{1+Gb^2} \quad \frac{F(I+1,1)-F(I-1,1)}{2F(I,1)}$$

* pour $I \geqslant 2$ et $J \geqslant 2$ (J varie de 2 à J_{max} ; pour J donné I varie de 2 à M(J)):

$$V(I,J) = V(I-1,J-1) + V1+V2$$

$$V1 = \frac{kT_e}{e} \quad \frac{F(I,J+1)-F(I,J-1)}{2F(I,J)}$$

$$V2 = \left[\frac{kT_e}{e} - Gb^2 \frac{kT_i}{e} \right] \frac{1}{1+Gb^2} \quad \frac{F(I+1,J)-F(I-1,J)}{2F(I,J)}$$

Deuxième pas

1) Il faut recalculer les points de la coque.
2) L'initialisation de la densité se fait de la façon suivante :

Les points qui figuraient déjà sur le premier quadrillage conservent comme valeurs initiales les valeurs obtenues à l'issue du premier calcul.

Les points intermédiaires introduits dans le second quadrillage sont initialisés par interpolation linéaire.

Au delà de la coque la valeur initiale (qui d'ailleurs ne sera pas modifiée) est F = 0.

Le programme se déroule de la même façon qu'avec la première valeur de H ; la valeur du TEST est généralement supérieure à celle du premier calcul, étant donné que le nombre de points est multiplié par 4.

REFERENCES

(1) R.J. TAYLOR, K.R. MACKENZIE, H. IKEZI.
The Review of Sci. Instrum. 43, 1675 (1972).

(2) R.J. TAYLOR.
Thesis, UCLA Report R.70 (1970).

(3) R. LIMPAECHER, K.R. MACKENZIE.
Proc. 3rd Intern. Conf. Quiescent Plasmas, Elsinore, Denmark.
Sept. 20-24 (1971) p. 22.

(4) R. LIMPAECHER, K.R. MACKENZIE.
Bull. Am. Phys. Soc. 16, 1222 (1971).

(5) R. LIMPAECHER, K.R. MACKENZIE.
Review of Scientific Instrum. 44, 726 (1973).

(6) R. LIMPAECHER.
Thesis, UCLA Report R-114 (1972).

(7) K.N. LEUNG, N. HERSHKOWITZ, K.R. MACKENZIE.
Phys. Fluids 19, 1045 (1976).

(8) N. HERSHKOWITZ, J.R. SMITH, J.R. DEKOCK.
Plasma Phys. 21, 823 (1979).

(9) R. JONES.
Plasma Phys. 20, 717 (1978).

(10) T.K. SAMEC, K.N. LEUNG, K.R. MACKENZIE, B.D. FRIED.
Bull. Am. Phys. Soc. 19, 928 (1974).

(11) K.N. LEUNG, T.K. SAMEC, A. LAMM.
Phys. Letters 51A, 490 (1975).

(12) J.M. BUZZI, J. SNOW, J.L. HIRSHFIELD.
Phys. Letters 54A, 344 (1975).

(13) K.N. LEUNG.
Thesis, UCLA Report PPG 222 (1972).

(14) N. HERSHKOWITZ, K.N. LEUNG, T. ROMESSER.
Phys. Rev. Letters 35, 277 (1975).

(15) K.N. LEUNG, N. HERSHKOWITZ, T. ROMESSER.
Phys. Letters 53A, 264 (1975).

(16) M. GRAD, J. BERKOWITZ, H. RUBIN.
"Peaceful Uses of Atomic Energy" (Proc. 2d Int. Conf. Geneva).
U.N. New-York, 31, p. 177 (1958).

.../...

(17) I. SPALDING.
"Advances in Plasma Physics" 4, 79.

(18) M.G. HAINES.
Nuclear Fusion 17, 811 (1977).

(19) J.L. DELCROIX.
Physique des Plasmas (Dunod 1963), Tome 1, Chapitre 3.

(20) O.B. FIRSOV.
"Plasma Physics and the Problem of Controlled Therm. Fusion" III, p. 386.

(21) B. LEHNERT.
Proc. of the Int. Conf. on High Magnetic Fields, p. 617 (1961).

(22) D. KELLY, B. FRIED.
Bull. Am. Phys. Soc. 20, 1244 (1975).

(23) A.J. MARCUS, G. KNORR, G. JOYCE.
Plasma Phys. 22, 1015 (1980).

(24) J.L. DELCROIX.
Physique des Plasmas (Dunod 1966), Tome 2, Chapitre 13.

(25) L. TONKS, I. LANGMUIR.
Phys. Rev. 34, 876 (1929).

(26) H. GRAD, R. VAN NORTON.
"Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Research", Suppl. 1, p. 61 (1962).

(27) W. SCHNURMAN, H. DE KLUIVER.
Plasma Phys. 7, 245 (1965).

(28) S.I. BRAGINSKII.
Reviews of Plasma Physics 1, p. 205.

(29) J.L. DELCROIX.
Physique des Plasmas (Dunod 1966) Tome 2, Chapitre 15.

(30) A. LAMM, K.N. LEUNG, K.R. MACKENZIE.
Bull. Am. Phys. Soc., 17, 1017 (1972).

(31) - Y. NAKAMURA, B.H. QUON, A.Y. WONG.
Phys. Letters 53A, 85 (1975).
- N. HERSHKOWITZ, K.N. LEUNG.
Appl. Phys. Letters 26, 607 (1975).
- R. SCHUMACHER, N. HERSHKOWITZ, K.R. MACKENZIE.
J. of Appl. Physics 47, 886 (1976).

(32) A.Y. WONG, R. STENZEL, D. ARNUSH, B.D. FRIED, C.F. KENNEL, H. REIM.
Bull. Am. Phys. Soc. 1017 (1972).

(33) D. GRESILLON, P.L. GALISON.
Phys. Fluids, 16, 2180 (1973).

.../...

(34) J.P. HIRT, M.Q. TRAN.
Helvetica Physica Acta, 47, 473 (1974).
(35) R.L. STENZEL, A.Y. WONG, H.C. KIM.
Phys. Rev. Letters 32, 654 (1974).
(36) D. GRESILLON, F. DOVEIL.
Phys. Rev. Letters 34, 77 (1975).
(37) A.Y. WONG, R.L. STENZEL.
Phys. Rev. Letters 34, 727 (1975).
(38) M.Q. TRAN, S. COQUERAND.
Helvetica Physica Acta 48, 488 (1975).
(39) A.Y. WONG, D.L. MAMAS, D. ARNUSH.
Phys. Fluids 18, 1483 (1975).
(40) A.Y. WONG, R.L. STENZEL, H.C. KIM, F.F. CHEN.
IAEA, CN/H 4-1, Volume 2, 589 (1975).
(41) L. SPITZER, Jr.
Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New-York (1962).